

Gracias Nicolás por tu aporte.

Hola, les adjunto primeros parciales RESUELTOS de MATEMÁTICA CÁTEDRA HANSEN,  
No tienen fecha pero fueron tomados entre 1999 y 2003 aprox.

Nicolás

Si necesitas ayuda con tu parcial, final o libre llama al **(011) 15-67625436**

Si necesitas parciales y apuntes entra a: <http://www.soko.com.ar/>

1. Hallar el dominio natural de la función  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{4-x^2}}$
2. ¿Es cierto que si  $f(x) = \frac{1}{\ln(1/x)}$  entonces  $f^{-1}(y) = e^{-1/y}$ ? Justificar.
3. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \leq 0$ , definida por la fórmula  $f(x) = ax^2 + 4x + c$ .
  - a) ¿Debe cumplirse alguna condición para que la gráfica de f sea una parábola?
  - b) Determinar a y c sabiendo que 2 es un cero de la función.
4. Sean  $f(x) = 1 - \cos x$ , para  $x \in [0, 4\pi]$ ,  $g(y) = \ln y$ . Hallar condiciones para que pueda realizarse la composición  $g \circ f$ , encontrar dicha composición (incluye determinar su dominio e imagen) y decidir si la función hallada es periódica.
5. Demostrar que si f es una función cuadrática sin término de primer grado y  $x = p$  es solución de la ecuación cuadrática  $f(x) = 0$  entonces  $x = -p$  también es solución de  $f(x) = 0$ .

RESOLUCIÓN

1. Siempre que se deba hallar el dominio natural de una función debemos fijarnos en qué parte de dicha función podría haber un valor de x con el que no sea posible encontrar una solución dentro de los nros reales.

En este caso, la función  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{4-x^2}}$  debe tener valores de x para los cuales 1+x sea

mayor que 0 (porque no se puede hacer ln de ningún número menor o igual a 0) y además  $4-x^2$  debe ser positivo y distinto de 0 ya que no sabemos hacer la raíz cuadrada de ningún nro negativo y si  $4-x^2 = 0$  nos quedaría una cuenta sin solución  $\left(\frac{a}{0} = \emptyset\right)$ .

Entonces:

$$\begin{array}{lcl}
 1+x > 0 & \text{y} & 4-x^2 > 0 \\
 x > -1 & & -x^2 > -4 \\
 & & x^2 < -(-4) \\
 & & |x| < \sqrt{4} \\
 & & |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2
 \end{array}$$

El dominio de la función es la INTERSECCIÓN de las dos soluciones que encontramos, o sea, la intersección entre  $x > -1$  y  $-2 < x < 2$ , que es el intervalo  $(-1, 2)$ .

RTA:  $Dmf(x) = x \in (-1, 2)$

2. Si tenemos una función f, para hallar su inversa  $f^{-1}$  debemos despejar x (o la variable independiente) de f y además f debe ser biyectiva. Entonces, si despejamos x de  $f(x) = \frac{1}{\ln(1/x)}$  tendríamos que llegar a  $f^{-1}(y) = e^{-1/y}$  para poder decir que la afirmación es verdadera.

Despejando x de  $f(x)$ :

$$f(x) = y = \frac{1}{\ln(1/x)} \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln(1/x) \Rightarrow e^{1/y} = 1/x \Rightarrow \frac{1}{e^{1/y}} = x \Rightarrow e^{-1/y} = x$$

Utilizando las propiedades  $\frac{1}{a} = b$  es igual a  $a = \frac{1}{b}$  ;  $\ln a = b$  es igual a  $a = e^b$  y  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

llegamos a la expresión  $e^{-1/y}$ , que es la misma que aparece en  $f^{-1}(y)$ , por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

RTA: Si, es cierto que si  $f(x) = \frac{1}{\ln(1/x)}$  entonces  $f^{-1}(y) = e^{-1/y}$

3. a) La función  $f(x) = ax^2 + 4x + c$  será una parábola siempre que se cumpla  $a \neq 0$  ya que si  $a = 0$  nos quedaría la expresión  $4x + c$  que es claramente una función lineal.

b) Si sabemos que 2 es un cero de la función (o sea que en  $x=2$  la función vale 0) y que además  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \leq 0$ , es decir, que  $f$  tiene imágenes negativas, entonces  $f$  se encuentra por debajo del eje  $x$ . Como estamos hablando de una función cuadrática, sólo puede tener como máximo dos ceros y su forma (gráficamente) es de una parábola. Si imaginamos una parábola por debajo del eje  $x$ , encontraremos que ésta sólo puede cortar al eje  $x$  UNA SOLA VEZ como máximo (de lo contrario tendría imágenes positivas) y por lo tanto 2 ES EL ÚNICO CERO DE  $f(x)$ .

Como sabemos que  $p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  siendo  $x_1$  y  $x_2$  ceros de  $p(x)$ , esto nos permite plantear que  $ax^2 + 4x + c = a(x - 2)(x - 2) = a(x - 2)^2$  ya que en este caso  $x_1 = x_2$ . Ahora sólo debemos aplicar cuadrado de un binomio y distribución para llegar a la función  $ax^2 + 4x + c$  pero sólo con  $a$  como incógnita.

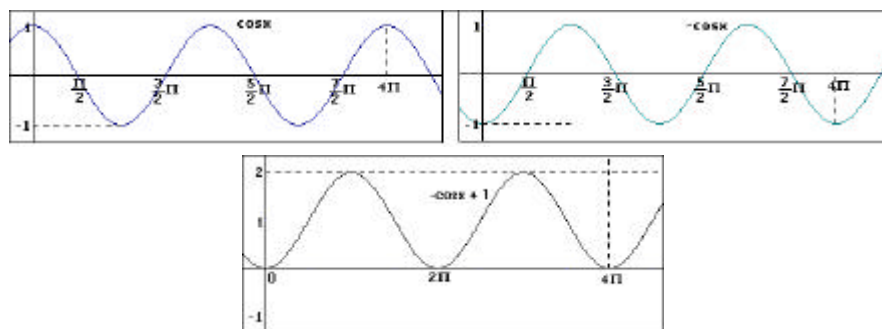
Entonces:  $a(x - 2)^2 = a(x^2 - 4x + 4) = ax^2 - 4ax + 4a$  y por lo tanto  $ax^2 + 4x + c = ax^2 - 4ax + 4a$

Si comparamos:  $ax^2 + 4x + c = ax^2 - \underbrace{4a}_{4}x + \underbrace{4a}_c$  obtenemos que  $-4a = 4$  y  $4a = c$ . Despejando y

reemplazando en estas últimas ecuaciones llegamos a que  $a = -1$  y entonces  $c = -4$ . Por lo tanto, el polinomio buscado es  $-x^2 + 4x - 4$ , el cual cumple con todo lo pedido.

RTA:  $a = -1$  y  $c = -4$ .

4. Para realizar una composición  $g \circ f$ , necesariamente la IMAGEN de  $f$  debe estar INCLUIDA dentro del DOMINIO de  $g$ . Para obtener la imagen de  $f$  en este caso conviene graficar ya que es una función trigonométrica sencilla. Por corrimientos:



Si necesitas clases para tu parcial, final o libre llama al (011) 15-67625436

Vemos que la imagen de  $1 - \cos x$  es el intervalo  $[0, 2]$ . Ahora hay que encontrar el dominio de  $g$ . Sabemos que la función  $g(y) = \ln y$  sólo admite valores de  $y > 0$  porque no se puede hacer  $\ln$  de ningún número menor o igual a 0. Por lo tanto el  $Dmg(x) = x \in (0, +\infty)$ .

Ahora hay que ver si  $Im f(x) \subseteq Dmg(x)$ , o sea, si el intervalo  $[0, 2]$  está incluido dentro del conjunto  $(0, +\infty)$ . Vemos que por un sólo número (el cero) la imagen de  $f$  no está contenida dentro del dominio de  $g$ , por lo tanto no se puede hacer la composición  $g \circ f$  AL MENOS QUE MODIFIQUEMOS LA IMAGEN DE  $f$ . Para esto tendremos que restringir el dominio de  $f$ . Lo que queremos entonces es que el cero no forme parte de la imagen de  $f$  para que de esta manera nos quede el intervalo  $(0, 2]$ , que sí está incluido en  $(0, +\infty)$ .

Si observamos la gráfica de  $1 - \cos x$  veremos que sólo vale cero en tres puntos:  $x = 0, x = 2p$  y  $x = 4p$ . Por lo tanto, si quitamos a estos puntos del dominio de  $f$ , su imagen pasará a ser  $(0, 2]$ . El dominio de  $f$  debe ser entonces  $x \in (0, 4p) - \{2p\}$ , o sea, de 0 a  $4p$  (sin incluirlos) menos el  $x = 2p$  (que está en el medio).

Con la función restringida nos queda:  $f : (0, 4p) - \{2p\} \rightarrow (0, 2]$  y  $g : R > 0 \rightarrow R$  donde se cumple que  $(0, 2] \subseteq R > 0$  y, en consecuencia, puede hacerse  $g \circ f$  representada por la fórmula  $\ln(1 - \cos x)$ , siendo su dominio el mismo de  $f$ , o sea,  $x \in (0, 4p) - \{2p\}$  y su imagen incluida dentro de la de  $g$ , es decir,  $R$ .

Entonces:  $(g \circ f)(x) = \ln(1 - \cos x) \quad g \circ f : \underbrace{(0, 4p) - \{2p\}}_{\text{Do min io}} \rightarrow \underbrace{R}_{\text{Im agen}}$

Si nos tomamos el trabajo de graficar aproximadamente a  $g \circ f$  (con tabla de valores, p.ej), veremos que es una función periódica.

RTA: Si  $f : (0, 4p) - \{2p\} \rightarrow (0, 2]$  y  $g : R > 0 \rightarrow R$  entonces  
 $(g \circ f)(x) = \ln(1 - \cos x)$  y  $g \circ f : (0, 4p) - \{2p\} \rightarrow R$   
 $g \circ f$  es periódica

5. Si tenemos una función cuadrática  $ax^2 + bx + c$  pero sin término de primer grado nos quedará una función de la forma  $ax^2 + c$  ya que  $bx$  es el término de primer grado que desaparece. Si además sabemos que  $x = p$  es solución de la ecuación cuadrática  $f(x) = 0$  entonces  $a(p^2) + c = 0$ . Como  $p$  está elevado al cuadrado, el resultado  $(\pm p)^2$  será siempre el mismo y por lo tanto puede afirmarse que  $a(\pm p^2) + c = 0$ , es decir,  $x = -p$  también es solución de  $f(x) = 0$ .

Si necesitas clases para tu parcial, final o libre llámá al (011) 15-67625436

- ¿Para qué valores reales de  $x$  se verifica  $|1+2\cos x| > 1$ ?
- Sean  $f(x) = |x-1|+2$  y  $g(y) = 3-y$ . Hallar, si es posible, la función compuesta  $g \circ f$  y graficarla indicando su dominio e imagen. ¿Es inyectiva  $g \circ f$ ? ¿Sobreyectiva? Justificar.
- En una estancia se ha sembrado maíz en una parcela de 100m de longitud y 70m de ancho, y para la próxima cosecha se quiere aumentar el tamaño de la parcela agregando franjas de igual ancho a un lado y a un extremo, manteniendo su forma rectangular. ¿De qué ancho deben ser las franjas agregadas para que, después del aumento, el área de la parcela sea de 13000m<sup>2</sup>?
- Hallar analítica o gráficamente  $f(-3,1)$  y un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = 2$  sabiendo que  $f$  es exponencial y que  $f(-1,2) = 2,7$  y  $f(4,3) = 16,1$ . ¿Puede haber un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = -2$ ? ¿Por qué?
- Sean  $a \neq 0$  y  $x$  reales y  $n$  un número natural. Demostrar que  $x+a$  divide a  $x^n + a^n$  sólo si  $n$  es impar.

RESOLUCIÓN

1. Para saber qué valores de  $x$  verifican  $|1+2\cos x| > 1$  sólo debemos resolver la inecuación

despejando  $x$ :

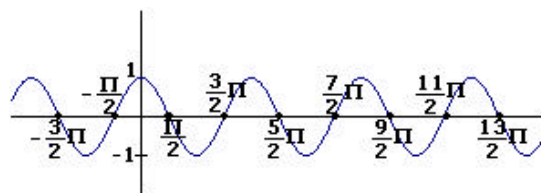
$$|1+2\cos x| > 1 \Rightarrow 1+2\cos x < -1 \quad \cup \quad 1+2\cos x > 1$$

$$2\cos x < -1-1 \quad \cup \quad 2\cos x > 1-1$$

$$\cos x < -2/2 \quad \cup \quad \cos x > 0$$

$$\cos x < -1 \quad \cup \quad \cos x > 0$$

Ahora nos quedaron dos inecuaciones mucho más sencillas que la primera y con sólo graficar la función  $\cos x$  podremos saber qué valores exactos de  $x$  cumplen con  $|1+2\cos x| > 1$ . Si vemos el gráfico  $\cos x$ :

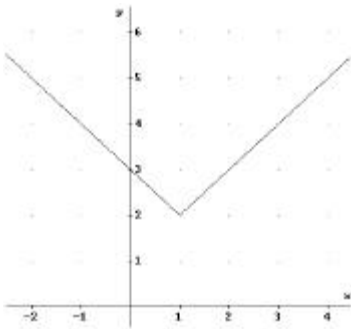


Para la inecuación  $\cos x < -1$  no hay solución ya que en ningún momento la gráfica del  $\cos x$  se encuentra por debajo de  $y = -1$ . Pero para  $\cos x > 0$  tenemos una serie de intervalos infinitos

representados por  $x \in \dots \left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right) \cup \left(\frac{3p}{2}; \frac{5p}{2}\right) \cup \left(\frac{7p}{2}; \frac{9p}{2}\right) \cup \left(\frac{11p}{2}; \frac{13p}{2}\right) \dots$  que cumplen con dicha inecuación.

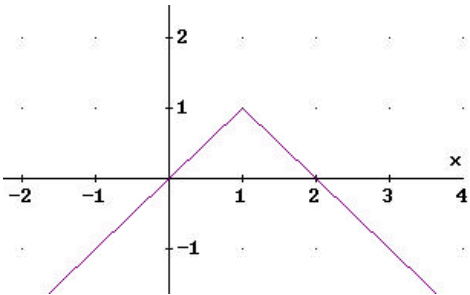
RTA:  $|1+2\cos x| > 1$  si  $x \in \dots \left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right) \cup \left(\frac{3p}{2}; \frac{5p}{2}\right) \cup \left(\frac{7p}{2}; \frac{9p}{2}\right) \cup \left(\frac{11p}{2}; \frac{13p}{2}\right) \dots$

2. Para realizar una composición  $g \circ f$ , necesariamente la IMAGEN de  $f$  debe estar INCLUIDA dentro del DOMINIO de  $g$ . Para obtener la imagen de  $f$ , graficamos:



Vemos que la imagen de  $f$  está representada por el intervalo  $[2, +\infty)$ . Ahora debemos hallar el dominio de  $g(y) = 3 - y$ , que claramente es una función lineal y por lo tanto  $Dmg(y) = x \in R$ . Como el intervalo  $[2, +\infty)$  está incluido dentro de  $R$  (nros reales), entonces puede realizarse la composición  $g \circ f$ , la cual estará dada por la fórmula  $3 - (|x-1| + 2)$  que simplificada nos queda  $1 - |x-1|$ .

Si graficamos  $(g \circ f)(x) = 1 - |x-1|$ :



Su dominio:  $x \in R$

Su imagen:  $(-\infty, 1]$

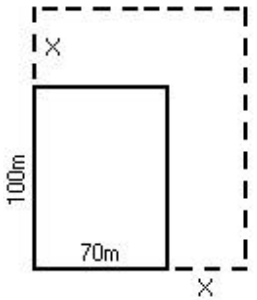
Vemos que no es inyectiva ya que a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes iguales (Ej:  $(0, 0)$  y  $(2, 0)$ ).

Tampoco es sobreyectiva ya que su imagen no abarca a todos los números reales, o sea,  $Im(g \circ f) \neq R$ .

RTA:  $(g \circ f)(x) = 1 - |x-1|$  y  $(g \circ f): R \longrightarrow (-\infty, 1]$

$g \circ f$  no es inyectiva ni sobreyectiva

3. Si hacemos un gráfico del problema vemos:



ÁREA TOTAL =  $13000m^2$

Como sabemos, el área original de la parcela es  $100 \cdot 70 = 7000m^2$ . Si se agregaran franjas de igual ancho a cada lado, el nuevo área estaría dado por  $(100+X) \cdot (70+X)$ . Si sabemos que el área de la nueva parcela debe ser de  $13000m^2$ , entonces podemos plantear:

$$(100 + X)(70 + X) = 13000$$

$$7000 + 100X + 70X + X^2 = 13000$$

$$X^2 + 170X + 7000 = 13000$$

$$X^2 + 170X + 7000 - 13000 = 0$$

$$X^2 + 170X - 6000 = 0$$

Nos queda una cuadrática que tiene como solución:  $X = \frac{-170 \pm \sqrt{170^2 - 4 \cdot (-6000)}}{2} = 30$  donde sólo

tomamos el valor positivo de las dos soluciones posibles ya que no tiene sentido hablar de longitudes negativas.

RTA: Las franjas deben tener 30m de ancho.

Si necesitas clases para tu parcial, final o libre llámá al (011) 15-67625436

4. Si  $f$  es una función exponencial, entonces tiene la forma  $ka^x$  siendo  $k \neq 0$ ,  $a \neq 1$  y  $a > 0$ . Además, sabemos que  $f(-1,2) = 2,7$  y  $f(4,3) = 16,1$ , o sea, cuando  $x$  vale  $-1,2$  la función da como resultado  $2,7$  y cuando  $x$  vale  $4,3$  la función da  $16,1$ .

Entonces:  $ka^{-1,2} = 2,7$  y  $ka^{4,3} = 16,1$

$$k = \frac{2,7}{a^{-1,2}} \quad \text{y} \quad k = \frac{16,1}{a^{4,3}}$$

Como  $f(-1,2)$  y  $f(4,3)$  forman parte de la misma función podemos igualar ambas ecuaciones:

$$\frac{2,7}{a^{-1,2}} = \frac{16,1}{a^{4,3}} \Rightarrow \frac{a^{4,3}}{a^{-1,2}} = \frac{16,1}{2,7} \Rightarrow \frac{a^{4,3}}{a^{-1,2}} = \frac{16,1}{2,7} \Rightarrow a^{5,5} = \frac{16,1}{2,7} \Rightarrow \log a^{5,5} = \log \frac{16,1}{2,7} \Rightarrow$$

$$5,5 \cdot \log a = \log \frac{16,1}{2,7} \Rightarrow \log a = \frac{\log 16,1 / 2,7}{5,5} \Rightarrow a = 10^{\left( \frac{\log 16,1 / 2,7}{5,5} \right)} = 1,384(\text{aprox.})$$

Utilizando las propiedades  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  es lo mismo que  $a \cdot d = b \cdot c$ ;  $\frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$ ;  $\log a^n = n \cdot \log a$  y

$\log a = b$  es igual a  $a = 10^b$  llegamos a que  $a$  vale aproximadamente  $1,38$ . Ahora sólo queda calcular  $k$  para determinar  $f$ :

$$k = \frac{16,1}{a^{4,3}} = \frac{16,1}{1,38^{4,3}} = 4,03(\text{aprox.}) \Rightarrow f(x) = 4,03 \times 1,38^x$$

Sabiendo que  $f(x) = 4,03 \times 1,38^x$  podemos calcular  $f(-3,1) = 4,03 \times 1,38^{-3,1} = 1,48(\text{aprox.})$ .

Sólo falta hallar un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = 2$ , o sea,  $4,03 \times 1,38^x = 2$

$$4,03 \times 1,38^x = 2 \Rightarrow 1,38^x = \frac{2}{4,03} \Rightarrow 1,38^x = \frac{2}{4,03} \Rightarrow x \cdot \log 1,38 = \log \left( \frac{2}{4,03} \right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{\log \left( \frac{2}{4,03} \right)}{\log 1,38} = -2,18(\text{aprox.})$$

En cuanto a si puede existir un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = -2$ , habría que plantear la misma ecuación que antes pero con  $-2$ , es decir,  $4,03 \times 1,38^x = -2$  y llegaríamos a que

$x \cdot \log 1,38 = \log \left( \frac{-2}{4,03} \right)$  donde nos encontramos con una operación sin solución ya que no se puede

hacer log de ningún número menor o igual a  $0$ .

RTA:  $f(-3,1) = 1,48(\text{aprox.})$ ;  $f(x) = 2$  si  $x = -2,18(\text{aprox.})$ ; no existe un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = -2$  ya que se debe resolver una ecuación sin solución.

1. Sea  $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } |x-1| \leq 2 \\ x-2 & \text{si } |x-1| > 2 \end{cases}$

Graficar f ¿Es inyectiva?¿sobreyectiva? Explique.

2. Hallar el dominio natural de la función  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(4-x^2)}$

3. Sean  $f(X) = -x^2 + 2x + 3$ ,  $g(y) = \sqrt{y^2 + 9}$ . Determinar los valores de x para los cuales  $(g \circ f)(x) = 3$ .

4. Sabiendo que f es una función exponencial completar la siguiente tabla:

x	?	2	5	6
f(x)	3	4	?	12

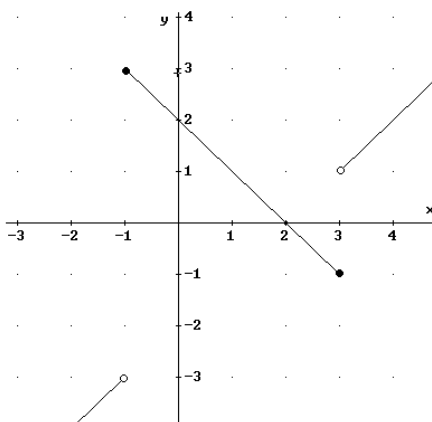
5. Demostrar que si  $f(x) = 5x - 3$  y  $g: R \rightarrow R$  es inyectiva entonces  $g \circ f$  está definida y es inyectiva.

RESOLUCIÓN

1. En este caso debemos graficar dos funciones lineales muy sencillas,  $2-x$  y  $x-2$ . Sin embargo, cada una tiene un dominio distinto que no está demasiado explícito. Para aclarar un poco las expresiones  $|x-1| \leq 2$  y  $|x-1| > 2$  sólo alcanza con resolverlas despejando x:

$ x-1  \leq 2$	$ x-1  > 2$	$ x-1  > 2$
$-2 \leq x-1 \leq 2$	$x-1 < -2$	$x-1 > 2$
$-2+1 \leq x \leq 2+1$	$x < -2+1$	$x > 2+1$
$-1 \leq x \leq 3$	$x < -1$	$x > 3$

Entonces, la función tomará la forma  $2-x$  si  $x \in [-1,3]$  y la forma  $x-2$  si  $x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ . Por lo tanto, la gráfica de  $f(x)$  es la siguiente:



Vemos que no es inyectiva ya que a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes iguales (Ej: (0,2) y (4,2)). Sí es sobreyectiva ya que su imagen abarca a todos los números reales.

2. Siempre que se deba hallar el dominio natural de una función debemos fijarnos en qué parte de dicha función podría haber un valor de x con el que no sea posible encontrar una solución dentro de los nros reales.

En este caso, la función  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(4-x^2)}$  debe tener valores de x

para los cuales  $x-1$  sea positivo o igual a cero ya que no sabemos hacer la raíz cuadrada de ningún nro

negativo. Además,  $4 - x^2$  debe ser mayor que 0 (porque no se puede hacer  $\ln$  de ningún número menor o igual a 0) y por último  $\ln(4 - x^2)$  debe ser distinto de cero ( $\frac{a}{0} = \emptyset$ ).

Entonces:

$x - 1 \geq 0$	$4 - x^2 > 0$	$\ln(4 - x^2) \neq 0$
$x \geq 1$	$-x^2 > -4$	$4 - x^2 \neq 1$
	$ x  < \sqrt{4}$	$-x^2 \neq 1 - 4$
	$-2 < x < 2$	$x^2 \neq -3 / -1$
		$ x  \neq \sqrt{3}$
		$x \neq \pm\sqrt{3}$

El dominio de la función es la INTERSECCIÓN de las tres soluciones que encontramos, o sea, la intersección entre  $x \geq 1$ ,  $-2 < x < 2$  y  $x \neq \pm\sqrt{3}$  que está representada por  $x \in [1, 2) - \{\sqrt{3}\}$ .

$$\text{RTA: } Dmf(x) = x \in [1, 2) - \{\sqrt{3}\}$$

3. En este caso damos por supuesto que  $f$  y  $g$  cumplen con las condiciones necesarias para que pueda realizarse  $g \circ f$ . Por lo tanto, realizamos directamente la composición:

$$g \circ f = g[f(x)] = g[-x^2 + 2x + 3] = \sqrt{(-x^2 + 2x + 3)^2 + 9}$$

Debemos encontrar valores de  $x$  para los cuales  $(g \circ f)(x) = 3$ , o sea,  $\sqrt{(-x^2 + 2x + 3)^2 + 9} = 3$ . Antes de tratar de elevar  $f(x)$  al cuadrado y despejar  $x$  (cosa bastante engorrosa), podemos simplificar el problema planteando  $\sqrt{a^2 + 9} = 3$  y veremos que para que se cumpla la igualdad,  $a$  debe ser igual a cero. Por lo tanto el problema queda simplificado con  $-x^2 + 2x + 3 = 0$  que es mucho más fácil de resolver que todo lo anterior:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \{-1, 3\}$$

$$\text{RTA: } (g \circ f)(x) = 3 \text{ si } x = -1 \text{ ó } x = 3$$

4. Si  $f$  es una función exponencial, entonces tiene la forma  $ka^x$  siendo  $k \neq 0$ ,  $a \neq 1$  y  $a > 0$ . Además, sabemos que  $f(2) = 4$  y  $f(6) = 12$ , o sea, cuando  $x$  vale 2 la función da como resultado 4 y cuando  $x$  vale 6 la función da 12.

Si necesitas clases para tu parcial, final o libre llámá al (011) 15-67625436

Entonces:  $ka^2 = 4$       y       $ka^6 = 12$   
 $k = \frac{4}{a^2}$       y       $k = \frac{12}{a^6}$

Como  $f(2)$  y  $f(6)$  forman parte de la misma función podemos igualar ambas ecuaciones:

$$\frac{4}{a^2} = \frac{12}{a^6} \Rightarrow \frac{a^6}{a^2} = \frac{12}{4} \Rightarrow a^{(6-2)} = 3 \Rightarrow a^4 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[4]{3} = 1,316(\text{aprox.}) \text{ entonces}$$

$$k = \frac{4}{(\sqrt[4]{3})^2} = 2,309(\text{aprox.}) \text{ entonces } f(x) = 2,309 \times (\sqrt[4]{3})^x$$

Teniendo  $f$  podemos completar la tabla calculando  $f(5)$  y  $f(x) = 3$

$$f(5) = 2,309 \times (\sqrt[4]{3})^5 = 9,116(\text{aprox.})$$

$$f(x) = 2,309 \times (\sqrt[4]{3})^x = 3 \Rightarrow (\sqrt[4]{3})^x = \frac{3}{2,309} \Rightarrow x = \log_{\sqrt[4]{3}} \frac{3}{2,309} = \frac{\ln(3/2,309)}{\ln(\sqrt[4]{3})} = 0,953(\text{aprox.})$$

NOTA: En la última parte se utilizaron las propiedades  $a^x = b$  es igual que  $x = \log_a b$  y  $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ .

RTA:

x	0,953	2	5	6
f(x)	3	4	9,116	12

5. Para demostrar lo pedido, debemos llegar a que  $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ , es decir, que a cada elemento del dominio de  $g \circ f$  le corresponden imágenes distintas y por lo tanto  $g \circ f$  es inyectiva.

Lo primero que plantearemos es la composición  $g \circ f$ , que va a estar representada por  $g[f(x)] = g[5x - 3]$ .

Al tener la fórmula de  $f(x)$  podemos ver que la misma es una función lineal y por lo tanto es inyectiva (además de sobreyectiva), pero vamos a demostrarlo:

$$5x_1 - 3 \neq 5x_2 - 3 \quad \text{siendo } x_1 \neq x_2$$

$$5x_1 \neq 5x_2$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Por lo tanto  $f$  es inyectiva y se cumplirá:

$$g[5x_1 - 3] \neq g[5x_2 - 3]$$

$$g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)]$$

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$$

siendo  $x_1 \neq x_2$

1. ¿Para qué valores de  $x$  se verifica  $2 < \frac{1}{x+2}$ ?
2. Si  $f:R \rightarrow R$  y  $g:R \rightarrow R$  son funciones inyectivas, ¿la función producto  $f.g$  es siempre inyectiva?
3. ¿Qué valores debe tener  $b$  para que  $y=1$  pertenezca a la imagen de la función cuadrática  $f(x) = x^2 - 2bx + 5$ ?
4. Dada la función  $f(x) = 2 \tan\left(\frac{x+p}{2}\right)$ 
  - a) Decir si la función es periódica, dar período, determinar si la función es biyectiva, y en qué intervalo lo es. Dar el dominio de la biyectiva.
  - b) Dar la inversa de la función.

RESOLUCIÓN

1. Para saber qué valores de  $x$  verifican  $2 < \frac{1}{x+2}$  sólo debemos resolver la inecuación despejando  $x$ :

$$2 < \frac{1}{x+2} \Rightarrow x+2 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow x < -3/2$$

Entonces  $x$  debe ser menor a  $-3/2$ . Sin embargo, vemos que dentro de la solución existe un número que anula al denominador de  $\frac{1}{x+2}$  y es el  $-2$ . Por lo tanto, la solución será el intervalo  $(-\infty, -3/2) - \{-2\}$ .

2. Tenemos que  $f$  y  $g$  son dos funciones inyectivas, o sea,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  y  $g(x_1) \neq g(x_2)$ . Debemos verificar si una función  $H(x) = f(x).g(x)$  es inyectiva siempre, es decir, si se cumple  $f(x_1).g(x_1) \neq f(x_2).g(x_2)$ . Sabemos que  $f(x_1)$  va a ser SIEMPRE distinto de  $f(x_2)$ , y lo mismo pasará con  $g(x_1)$  y  $g(x_2)$ , por lo tanto todo parece indicar que  $H(x)$  también será inyectiva. Sin embargo, podemos encontrar un caso en el que  $H(x)$  no es inyectiva: ¿qué pasa si  $f(x_1) = g(x_2)$  y  $f(x_2) = g(x_1)$ ? En este caso no se cumpliría  $f(x_1).g(x_1) \neq f(x_2).g(x_2)$  ya que nos quedaría una igualdad, y no una desigualdad. Por ejemplo: supongamos que  $f(x_1) = a$  y  $g(x_1) = b$ , pero también  $f(x_2) = b$  y  $g(x_2) = a$ . Por ahora se cumple que  $f(x_1) \neq f(x_2)$  y  $g(x_1) \neq g(x_2)$  ya que ambas son inyectivas. Pero tratemos de plantear la función  $H(x)$  para verificar si es inyectiva:

$$\begin{aligned} H(x_1) &\neq H(x_2) \\ f(x_1).g(x_1) &\neq f(x_2).g(x_2) \\ a.b &\neq b.a \\ \boxed{a.b} &= \boxed{b.a} \end{aligned}$$

Vemos que en este caso  $H(x)$  no es inyectiva y, en consecuencia, demostramos que  $H(x)$  no es inyectiva siempre.

RTA: La función producto  $f.g$  no es siempre inyectiva ya que si  $f(x_1) = g(x_2)$  y  $f(x_2) = g(x_1)$  habrá elementos distintos del dominio con la misma imagen.

3. Se piden valores de  $b$  para que 1 sea imagen de la función  $f(x) = x^2 - 2bx + 5$ . Para esto debe cumplirse  $x^2 - 2bx + 5 = 1$  que, simplificado, queda  $x^2 - 2bx + 4 = 0$ . Lo que se debe hallar entonces es cuáles valores de  $b$  permiten que dicha ecuación tenga solución ya que  $x$  puede tomar los valores de todos los números reales (es el dominio natural de la cuadrática). Para esto hay plantear la fórmula que permite resolver una ecuación cuadrática, o sea:

$$x = \frac{2b \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 16}}{2}$$

Ahora vemos que  $b$  no puede tomar cualquier valor ya que si  $4b^2 - 16$  da por resultado un número menor a cero, entonces la ecuación no tendrá solución debido a que no sabemos hacer la raíz cuadrada de ningún número negativo. Por lo tanto debe cumplirse  $4b^2 - 16 \geq 0$ :

$$4b^2 - 16 \geq 0$$

$$4b^2 \geq 16$$

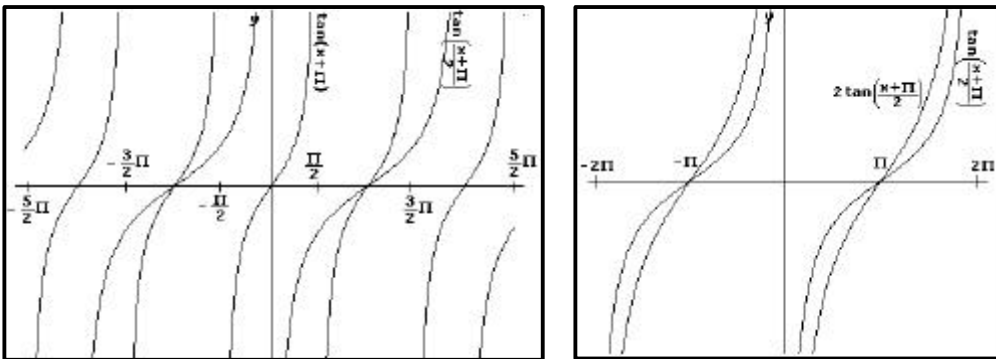
$$b^2 \geq 16/4$$

$$|b| \geq \sqrt{4}$$

Entonces,  $b \leq -2 \cup b \geq 2$

RTA:  $b \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

4. Si graficamos por corrimientos (recordando que la gráfica de  $\tan(x)$  es igual a la de  $\tan(x+p)$ ):



a) Se observa claramente que  $f(x) = 2 \tan\left(\frac{x+p}{2}\right)$  es periódica, siendo su período  $2p$  ya que la gráfica se repite cada  $2p$ . Tampoco es biyectiva al menos que se restrinja su dominio al intervalo  $(kp, (k+2)p)$  siendo  $k$  un nro par o cero.

b) Una vez conseguido el dominio para que  $f$  sea biyectiva, se puede plantear la inversa  $f^{-1}$  despejando  $x$  de  $f(x)$ :

$$y = 2 \tan\left(\frac{x+p}{2}\right) \Rightarrow \frac{y}{2} = \tan\left(\frac{x+p}{2}\right) \Rightarrow \arctg\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{x+p}{2} \Rightarrow 2 \arctg\left(\frac{y}{2}\right) = x+p \Rightarrow$$

$$2 \arctg\left(\frac{y}{2}\right) - p = x \Rightarrow f^{-1}(y) = 2 \arctg\left(\frac{y}{2}\right) - p$$

RTA: a) La función es periódica; su período es  $2p$ ; es biyectiva si  $x \in (kp, (k+2)p)$  siendo  $k$  un nro par o cero.

b)  $f^{-1}(y) = 2 \arctg\left(\frac{y}{2}\right) - p$

1. Para la función:  $e^{2x-1} + 2$  se pide:
  - a) Determinar dominio e imagen.
  - b) Determinar subconjuntos de  $R$  lo más grande posibles como dominio y codominio de  $f$ , de manera que resulte biyectiva y calcular su función inversa.
2. Demostrar que cualquiera sea  $t$ ,  $\cos(t - 3\pi) = -\cos t$  y mostrarlo gráficamente.
3. Para  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  definida para  $x \geq 0$ , hallar dominio de negatividad de  $f$ .
4. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Decidir si  $y = 0$ ,  $y = -4$  e  $y = 8$  pertenecen a la imagen de  $f$ .

5. Dadas las funciones  $f(x) = \ln(x-2)$  si  $x \geq 3$  y  $g(x) = \frac{1}{x-3}$  definidas en sus dominios naturales, hallar  $g \circ f$  y  $f \circ g$  en caso de ser posible y si no es posible explicar por qué.

#### RESOLUCIÓN

1. a) Siempre que se deba hallar el dominio natural de una función debemos fijarnos en qué parte de dicha función podría haber un valor de  $x$  con el que no sea posible encontrar una solución dentro de los nros reales.

En este caso, la función  $e^{2x-1} + 2$  puede tener cualquier valor de  $x$  ya que  $e$  puede estar elevado a cualquier número real, entonces,  $Dmf(x) = R$ . Para determinar la imagen sabemos que  $e^a$  SIEMPRE DA POSITIVO (siendo  $a$  cualquier real) y por lo tanto  $e^{2x-1}$  va a tener sólo imágenes positivas ( $R > 0$ ). Pero existe un dos que está sumando y que hace que las imágenes de la función en la gráfica se trasladen hacia arriba dos puntos, por lo tanto la imagen de  $f$  va a ser  $R > 2$ .

b) Según el punto anterior, si graficamos aproximadamente a  $f$  veremos que es biyectiva en su dominio natural y si tiene como codominio a  $R > 2$ . Por lo tanto, si  $f: R \longrightarrow R > 2$  entonces es biyectiva. Para calcular su inversa  $f^{-1}$  hay que despejar a  $x$ :

$$e^{2x-1} + 2 = y \Rightarrow e^{2x-1} = y - 2 \Rightarrow 2x - 1 = \ln(y - 2) \Rightarrow 2x = 1 + \ln(y - 2) \Rightarrow x = \frac{1 + \ln(y - 2)}{2}$$

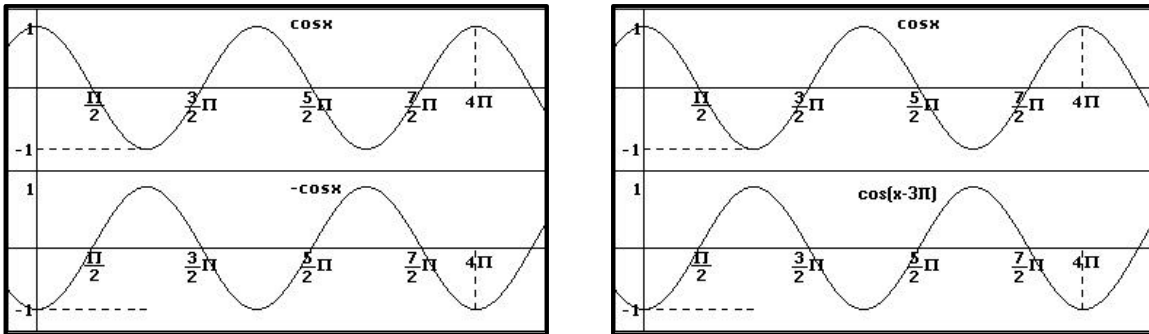
$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1 + \ln(y - 2)}{2} \quad \text{si } f^{-1}: R > 2 \longrightarrow R$$

2. En base a las propiedades trigonométricas:  $\begin{cases} \text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a) \\ \cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) \end{cases}$  podemos

demostrar que  $\cos(t - 3\pi) = -\cos(t)$ :

$$\cos(t - 3p) = \cos(t) \cdot \underbrace{\cos(-3p)}_{-1} - \underbrace{\sin(t) \cdot \sin(-3p)}_0 = \cos(t) \cdot (-1) - \sin(t) \cdot 0 = -\cos(t)$$

Si graficamos  $\cos(t - 3p)$  y  $-\cos(t)$  por corrimientos, obtenemos:



O sea, las gráficas de  $\cos(t - 3p)$  y  $-\cos(t)$  son iguales.

3. Se debe hallar el dominio de NEGATIVIDAD de  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  si  $x \geq 0$ . Es decir, hay que hallar los valores de X (mayores o iguales a cero) en los cuales  $x^2 - 4x - 5$  da negativo. Para esto, lo mejor es plantear  $f(x)$  de la forma  $a(x-x_1)(x-x_2)$ , o sea, hallando sus raíces:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \{5; -1\} \quad \text{entonces} \quad f(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

Ahora ha quedado  $f(x) = (x-5)(x+1)$  donde es más fácil determinar cuándo  $f$  va a ser negativa: si  $(x-5)$  da negativo y  $(x+1)$  da positivo, o si  $(x-5)$  da positivo y  $(x+1)$  da negativo.

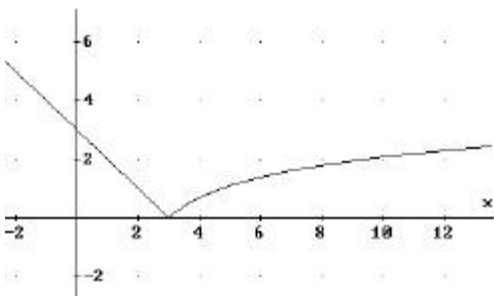
$$\begin{array}{ccc} x-5 < 0 & \text{y} & x+1 > 0 \\ x < 5 & & x > -1 \end{array} \quad \text{ò} \quad \begin{array}{ccc} x-5 > 0 & \text{y} & x+1 < 0 \\ x > 5 & & x < -1 \end{array}$$

$$S_1 = (-\infty, 5) \cap (-1, +\infty) = (-1, 5) \quad \cup \quad S_2 = \emptyset$$

Como el segundo caso no tiene solución, tomamos sólo a  $S_1$  como solución final. Pero antes hay que recordar que X debía ser mayor o igual a cero ya que el dominio de  $f$  estaba restringido. Entonces, al intervalo  $(-1, 5)$  hay que sacarle los números negativos, quedando como solución definitiva el intervalo  $[0, 5)$ .

RTA:  $f(x) < 0$  si  $x \in [0, 5)$

4. Existen varias formas de resolver este punto, siendo la más fácil graficar  $f$  y determinar gráficamente si los puntos dados pertenecen a la imagen. En base a la gráfica de  $\ln(x)$  y  $x$ , por corrimientos se llega a que la gráfica de  $f$  es la siguiente:



Se ve que la imagen de  $f$  son los  $R \geq 0$  y por lo tanto  $y=0$  e  $y=8$  pertenecen a la imagen, mientras que  $y=-4$  no.

RTA:  $y=8$  e  $y=0$  pertenecen a la imagen de  $f$ .

5. Si se debe hallar tanto  $g \circ f$  como  $f \circ g$  entonces es necesario determinar dominio natural e imagen de  $f$  y de  $g$ .

Por lo tanto, si  $f(x) = 2x - 3$  entonces  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  y si  $g(x) = \frac{1}{x-3}$  entonces  $g: \mathbb{R} \neq 3 \longrightarrow \mathbb{R} \neq 0$ .

Ahora hay que determinar si puede hacerse  $g \circ f$  ó  $f \circ g$ :

Para realizar  $g \circ f$ , la IMAGEN de  $f$  debe estar INCLUÍDA dentro del DOMINIO de  $g$ , es decir,  $\mathbb{R}$  debe estar incluido dentro de  $\mathbb{R} \neq 3$  y, como vemos, esto no es así. Por lo tanto no puede realizarse  $g \circ f$  ya que la imagen de  $f$  no está incluida dentro del dominio de  $g$ .

Para realizar  $f \circ g$ , la IMAGEN de  $g$  debe estar INCLUÍDA dentro del DOMINIO de  $f$ , es decir,  $\mathbb{R} \neq 0$  tiene que estar incluido dentro de  $\mathbb{R}$ , condición que se cumple y, en consecuencia, puede realizarse la composición  $f \circ g$  que está dada por la fórmula  $2\left(\frac{1}{x-3}\right) - 3$ .

RTA:  $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x-3} - 3$  ; no puede realizarse  $g \circ f$  ya que la imagen de  $f$  no está incluida dentro del dominio de  $g$ .

Si necesitas clases para tu parcial, final o libre

llamá al (011) 15-67625436

- Hallar el dominio natural de  $f(x) = -\ln[(9-x^2)(x+1)^2]$
- En base al gráfico de  $\text{sen } x$  y utilizando corrimientos (muestre cada uno de ellos en la hoja), graficar  $\left| \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right| - 1$
- Hallar, si es posible,  $f \circ g$  y  $g \circ f$ . Indicar por qué puede o no efectuarse la composición.  
 $f(x) = \sqrt[4]{x}$  y  $g(x) = 2 - x^2$
- Hallar una función cuadrática con raíces  $-1$  y  $3$  cuya imagen sea  $(-\infty, 2]$ .
- Definir los mayores subconjuntos  $A$  y  $B$  de los números reales para los cuales  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = -2e^x + 1$  sea biyectiva. Hallar su inversa.

RESOLUCIÓN

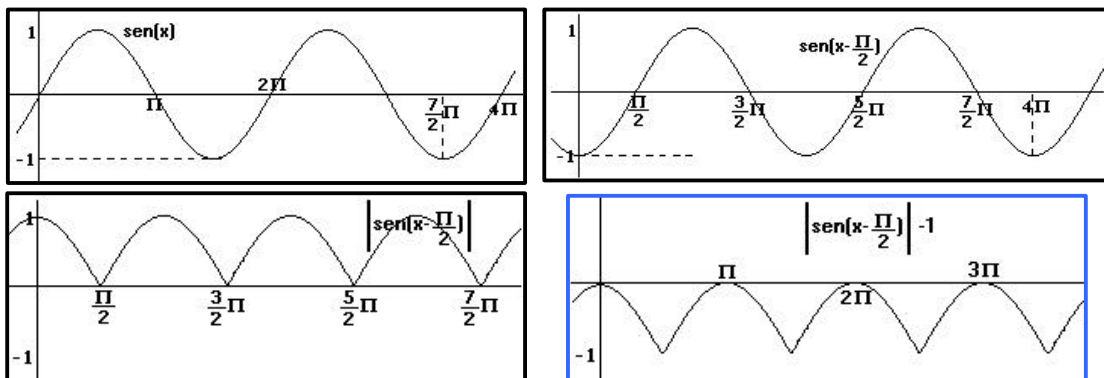
1. En este punto debemos fijarnos en qué parte de la función podría haber un valor de  $x$  con el que no sea posible encontrar una solución dentro de los nros reales. Como no puede hacerse  $\ln$  de ningún número menor o igual a cero, la expresión  $(9-x^2)(x+1)^2$  debe dar siempre un valor mayor que cero, es decir,  $(9-x^2)(x+1)^2 > 0$ . Puede notarse que  $(x+1)^2$  va a dar siempre positivo, aunque si  $x = -1$  va a dar cero y por lo tanto  $x = -1$  no va a formar parte de la solución. Ahora sólo debe cumplirse que  $(9-x^2)$  devuelva valores mayores a cero para que el producto entre  $(9-x^2)$  y  $(x+1)^2$  sea siempre positivo:

$$\left. \begin{array}{l} 9-x^2 > 0 \\ -x^2 > -9 \\ x^2 < 9 \\ |x| < \sqrt{9} \end{array} \right\} \Rightarrow -3 < x < 3$$

Entonces  $x$  debe estar entre  $-3$  y  $3$  pero hay que recordar que  $x = -1$  no forma parte de la solución y hay que omitirlo. En conclusión, la solución final va a ser  $x \in (-3, 3) - \{-1\}$ .

RTA:  $Dmf(x) = x \in (-3, 3) - \{-1\}$

2.



3. Si se debe hallar tanto  $g \circ f$  como  $f \circ g$  entonces es necesario determinar dominio natural e imagen de  $f$  y de  $g$ .

Por lo tanto, si  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  entonces  $f: R \geq 0 \longrightarrow R \geq 0$  y si  $g(x) = 2 - x^2$  entonces  $g: R \longrightarrow R \leq 2$ .

Ahora hay que determinar si puede hacerse  $g \circ f$  ó  $f \circ g$ :

Para realizar  $g \circ f$ , la IMAGEN de  $f$  debe estar INCLUÍDA dentro del DOMINIO de  $g$ , es decir,  $R \geq 0$  debe estar incluido dentro de  $R$  y, como vemos, esto se cumple. En consecuencia, puede realizarse la composición  $g \circ f$  que está dada por la fórmula  $2 - (\sqrt[4]{x})^2 = 2 - \sqrt{x}$ .

Para realizar  $f \circ g$ , la IMAGEN de  $g$  debe estar INCLUÍDA dentro del DOMINIO de  $f$ , es decir,  $R \leq 2$  tiene que estar incluido dentro de  $R \geq 0$ , condición que no se cumple y por lo tanto no puede realizarse  $f \circ g$ .

4. Si una función cuadrática tiene como raíces  $-1$  y  $3$ , se puede plantear  $f(x) = a(x+1)(x-3)$  ya que  $p(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$  siendo  $x_1$  y  $x_2$  ceros de  $p(x)$ . Además, la imagen de  $f$  debe ser menor o igual a  $2$  y extenderse hacia  $-\infty$ . Para que esto suceda,  $f$  debe tener como valor máximo al punto  $(1,2)$  debido a que una función cuadrática adquiere su valor máximo o mínimo (en este caso máximo) en el punto medio de sus dos raíces (en este caso  $x=1$ ). Es decir,  $f(x) = a(x+1)(x-3)$  debe pasar por el punto  $(1,2)$  y por lo tanto se debe resolver la ecuación  $a(1+1)(1-3) = 2$  que da como resultado  $a = -1/2$ . Como solución, la función buscada es  $f(x) = -1/2(x+1)(x-3) = -1/2x^2 + x + 3/2$ .

$$\text{RTA: } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

5. Si  $f(x) = -2e^x + 1$  entonces su dominio natural es  $R$  (ya que  $e$  puede elevarse a cualquier número real) y su imagen deberá ser el dominio de su inversa  $f^{-1}$ , o sea, se debe despejar  $x$  de  $f(x)$  y determinar el dominio de la función que obtengamos:

$$y = -2e^x + 1 \Rightarrow y - 1 = -2e^x \Rightarrow \frac{y-1}{-2} = e^x \Rightarrow \ln\left(\frac{y-1}{-2}\right) = x \Rightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y-1}{-2}\right)$$

Ahora hay que hallar el dominio natural de  $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y-1}{-2}\right)$ . Como no se puede hacer  $\ln$  de ningún número

menor o igual a cero, entonces  $\frac{y-1}{-2}$  debe ser mayor a cero:

$$\frac{y-1}{-2} > 0 \Rightarrow y-1 < 0 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow \text{Dmf}^{-1}(y) = R < 1$$

$$\text{RTA: Si } f(x) = -2e^x + 1 \text{ y } f: R \longrightarrow R < 1, \text{ entonces } f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y-1}{-2}\right) \text{ y } f^{-1}: R < 1 \longrightarrow R.$$

1. Verificar que cualquiera sea  $a \in \mathbb{R}$  la función  $f(x) = a(x-5)+1$  es una recta que pasa por el punto  $(5,1)$ . ¿Cuánto debe valer  $a$  para que la recta pase por el punto  $(2,4)$ ?
2. Dadas las funciones  $f$  y  $g$  definidas en sus dominios naturales, se pide hallar la función  $2g+f$  explicitando los dominios de  $f$ , de  $g$  y de la función hallada.  

$$g(x) = \frac{1}{x} - 3 \quad f(x) = e^x - 2(1/x)$$
3. Dadas  $g: \mathbb{R} > -1$ ,  $g(x) = x+1$  y  $f(x) = 3\ln x$  definir  $f \circ g$  si es posible y en ese caso graficar mediante corrimientos.
4. Hallar subconjuntos  $A$  y  $B$  lo más grandes posibles como para que  $f$  sea inversible, calcular la inversa y demostrar que se cumple la definición  
 $f(x) = 3 - \ln(x+5)$

## RESOLUCIÓN

1. Para verificar lo pedido se debe reemplazar los valores de  $X$  e  $Y$  según el punto  $(5,1)$ . Entonces  $f(5) = a(5-5)+1 = a \cdot 0 + 1 = 1$ . Como se observa, no importa cuál sea el valor de  $a$  ya que en  $f(5)$  su valor se anula con el cero.

Si se quiere que la recta pase por el punto  $(2,4)$  también hay que reemplazar los valores de  $X$  e  $Y$ :  
 $f(2) = a(2-5)+1 = 4 \Rightarrow a(-3)+1 = 4 \Rightarrow a(-3) = 4-1 \Rightarrow a = 3/(-3) = -1$

$$\boxed{\text{RTA: } a = -1}$$

2. Primero, se deben hallar los dominios de  $f$  y  $g$ . Si  $f(x) = e^x - 2(1/x)$  entonces  $X$  puede tomar todos los valores de  $\mathbb{R}$  MENOS el cero ya que  $\frac{1}{0} = \emptyset$ . Si  $g(x) = \frac{1}{x} - 3$  entonces  $X$  también puede tomar todos los valores de  $\mathbb{R}$  MENOS el cero. Entonces:  $Dmf(x) = Dmg(x) = \mathbb{R} \neq 0$ .

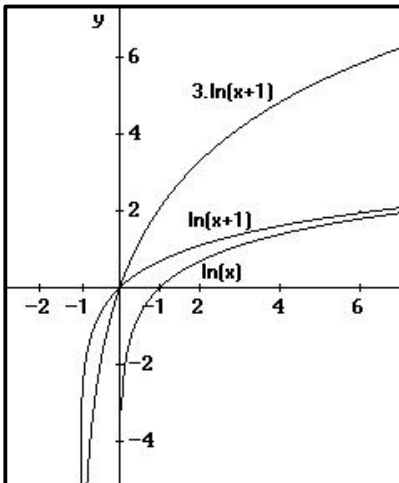
Para hallar  $2g+f$  sólo hay que reemplazar:  $2g+f = 2\left(\frac{1}{x} - 3\right) + e^x - 2(1/x)$ . Su dominio también es  $\mathbb{R} \neq 0$  ya que  $X$  no puede valer cero.

$$\boxed{\text{RTA: } P(x) = 2g + f = 2\left(\frac{1}{x} - 3\right) + e^x - 2(1/x); \quad Dmf(x) = Dmg(x) = DmP(x) = \mathbb{R} \neq 0}$$

3. Para realizar  $f \circ g$ , la IMAGEN de  $g$  debe estar INCLUIDA dentro del DOMINIO de  $f$ . Si  $f(x) = 3\ln x$  entonces su dominio es  $x > 0$  ya que no se puede hacer  $\ln$  de ningún número menor o igual a cero. Como  $g(x)$  tiene su dominio restringido, su imagen también estará limitada. Si graficamos  $g(x) = x+1$  con  $x > -1$  veremos que su imagen es  $\mathbb{R} > 0$ . Por lo tanto,  $\text{Im } g(x) = \mathbb{R} > 0$  tiene que estar incluida en  $Dmf(x) = \mathbb{R} > 0$ ; esto se cumple y en consecuencia puede realizarse  $f \circ g$  representada por  $3\ln(x+1)$ .

Si necesitas clases para tu parcial, final o libre llama al (011) 15-67625436

Graficando por corrimientos:



4. Para que una función pueda tener inversa, necesariamente debe ser biyectiva, o sea, inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. Para verificar que  $f$  es inyectiva se debe cumplir  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , o sea, a elementos distintos del dominio le deben corresponder imágenes distintas. Para esto puede realizarse la comprobación mediante:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &\neq f(x_2) \\ 3 - \ln(x_1 + 5) &\neq 3 - \ln(x_2 + 5) \\ -\ln(x_1 + 5) &\neq -\ln(x_2 + 5) \\ \ln(x_1 + 5) &\neq \ln(x_2 + 5) \\ x_1 + 5 &\neq x_2 + 5 \\ x_1 &\neq x_2 \end{aligned} \right\}$$

Ahora sólo resta saber si  $f$  es SOBREYECTIVA. Para esto se debe determinar su imagen despejando  $x$  de  $f$ :

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3 - \ln(x + 5) \\ y &= 3 - \ln(x + 5) \\ y - 3 &= -\ln(x + 5) \\ 3 - y &= \ln(x + 5) \\ e^{3-y} &= x + 5 \\ e^{3-y} - 5 &= x \end{aligned} \right\}$$

Para determinar los subconjuntos A y B se debe hallar el dominio e imagen de  $f(x)$ . Sabemos que su imagen son todos los números reales. Su dominio está dado por  $x > -5$  ya que en  $f(x) = 3 - \ln(x + 5)$  la expresión  $x + 5$  debe ser mayor a cero debido a que no se puede hacer  $\ln$  de ningún número menor o igual a cero.

RTA: Si  $f(x) = 3 - \ln(x + 5)$  y  $f: R > -5 \longrightarrow R$  entonces  $f^{-1}(y) = e^{3-y} - 5$  y  $f^{-1}: R \longrightarrow R > -5$

Si necesitas clases para tu parcial, final o libre llámá al (011) 15-67625436