UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN.
DEPARTAMENTO. DE CIENCIAS BÁSICAS
DIVISIÓN MATEMÁTICA
ASIGNATURA: ALGEBRA. PRIMERA EVALUACIÓN

TEMA 1

12–10–2007 – 9 hs

APELLIDO Y NOMBRES.. LEGAJO........................
COMISIÓN Nro: .... HORARIO............................... DOCENTES...............................

CARRERA..

Copie este cuadro a la hoja de la prueba y complételo

- ***Se deberá escribir con tinta. Sólo lo así escrito será tenido en cuenta al corregir la evaluación.***
- *No es necesario transcribir los enunciados en la hoja de la prueba.*
- *La comprensión de los enunciados forma parte de la prueba. No se aceptarán preguntas ni aclaraciones de ningún tipo.*

---

1. Resolver la siguiente ecuación: $\text{sen}^3 x = 1/8$.

Primeramente despejemos $sen^3 x = \frac{1}{8} \to senx = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$$senx = \frac{1}{2}\begin{cases} x = 30^{\circ} = \frac{1}{6}\pi \text{ (Primer cuadrante)} \\ x = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \text{ (Segundo Cuadrante)} \end{cases}$$

Cuando buscamos las distintas soluciones tenemos que tener en cuenta que como es una función trigonométrica, se repite cada 2π (360º)

$x_1 = \frac{1}{6}\pi + 2\pi k$ donde k es un número entero que representa la cantidad de "vueltas" que ha dado el ángulo en la circunferencia donde se lo ubica.

$x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$

2. Resolver la siguiente ecuación en **C**: $x^4 + 4 = 0$.

Primeramente despejamos x: $x^4 + 4 = 0 \to x^2 = -4 \to |x| = \sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}.\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = 2.i$

$$|x| = 2i\begin{cases} x = 2i \\ \text{ó} \\ x = -2i \end{cases}$$

3. Hallar los valores de k que hagan que el siguiente sistema lineal tenga solución única:

$$kx + 2y - 3y = 0$$
$$x + 3y + 2z = 0$$
$$x + y + z = 0$$

Primero expresemos el sistema en forma matricial: $\begin{pmatrix} k & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para que el sistema tenga solución, la primera matriz debe poseer inversa, y para ello su determinante no debe ser cero. Hay muchos valores de k para que el determinante sea distinto de cero, pero uno sólo para que el determinante sea cero (en el que el sistema no tendrá solución). Por razones prácticas, nos conviene hallar este valor de k.

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k(3-2) - 2(1-2) - 3(1-3) = k + 2 + 6 = k + 8 = 0$$

$k = -8$

Como con $k = -8$ el sistema no tiene solución, para que tenga solución, pues, k debe ser distinto de – 8. De allí que para que el sistema tenga solución $k \in \Re - \{-8\}$

4. Resolver el siguiente sistema lineal por el método de la matriz inversa:

$$\begin{aligned} x \ - y + 3y &= -7 \\ x + 2y + 7z &= -6 \\ x \qquad + 4z &= -6 \end{aligned}$$

Expresemos el sistema como un producto de matrices: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Para calcular la matriz con las soluciones (X) necesitamos multiplicar la inversa de la matriz de los coeficientes (A) y la matriz de los resultados (B).

Tener en cuenta que:

A. X = B (no existe la división por lo que debemos hacer que A se valla) A^{-1} A . X = A^{-1}. B

Como A^{-1} . A = I (identidad) y el producto de I . X = X tenemos que: X = A^{-1}. B

Dejo en sus manos el cálculo de la inversa, directamente la utilizaremos.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Haciendo el producto X = A^{-1}. B = $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Obtenemos el resultado buscado.

5. Hallar, si existe, el punto de intersección entre la recta que pasa por los puntos

A = (1, 2, –1) y B = (2, 5, 4) y el plano $2x - y + z = 7$.

Empecemos hallando la recta que pasa por A y B:

L: α (B – A) + A = α [((2, 5, 4) – (1, 2, –1)] + (1, 2, –1) = α (1, 3, 5) + (1, 2, – 1)

Todo punto que pertenezca a esta recta puede expresarse como: (α + 1, 3α + 2, 5α – 1)

Ahora busquemos el punto de intersección ubicando este punto dentro del plano.

$2(\alpha + 1) - (3\alpha + 2) + (5\alpha - 1) = 7$

Despejemos alfa, $2\alpha + 2 - 3\alpha - 2 + 5\alpha - 1 = 7$ Sumemos las alfas para despejarla.

$4\alpha - 1 = 7 \xrightarrow[\text{despejamos}]{} \alpha = 2$

Con el valor de alfa hallado volveremos a la recta para saber cual es el punto.

$(\alpha + 1, 3\alpha + 2, 5\alpha - 1) = (2 + 1, 3.2 + 2, 5.2 - 1) = \boxed{(3, 8, 9)}$

6. Estudiar si las rectas X = (2, 1, –1) + t (2, 3, 2) X = (4, 5, –1) + t’ (1, 1, 2) son coplanares.

Hay dos maneras para que dos rectas sean coplanares, a) que sean paralelas (pero no la misma recta) o b) que se corten en un solo punto.

Como los vectores directores no son paralelos entre sí (no existe un número que al ser multiplicado a uno de ellos que de cómo el resultado el otro) nos queda averiguar si se cortan en algún punto. Para ello igualemos ambas ecuaciones y despejemos t y t’. Para facilitar la comprensión de las cuentas cambiaré t por alfa y t’ por beta.

Así X = (2, 1, –1) + t (2, 3, 2) lo escribiré X = (2, 1, –1) + α (2, 3, 2)

X = (4, 5, –1) + t’ (1, 1, 2) lo escribiré X = (4, 5, –1) + β (1, 1, 2)

Igualemos las ecuaciones para hallar los valores de alfa y beta. Estos valores deben ser únicos para que exista un punto de intersección entre ambas.

(2, 1, –1) + α (2, 3, 2) = (4, 5, –1) + β (1, 1, 2)

(2 + 2 α, 1 + 3 α, – 1 + 2 α) = (4 + β, 5 + β, –1 + 2 β) igualemos las coordenadas

2 + 2 α = 4 + β (despejemos β y reemplacemos en la ecuación de abajo) 2 + 2 α – 4 = β, β = 2 α – 2

1 + 3 α = 5 + β , 1 + 3 α = 5 + 2 α – 2 (ahora hallemos el valor de alfa) α = 2 (y beta) β = 2

– 1 + 2 α = –1 + 2 β (verifiquemos que sea una igualdad)

– 1 + 2 .2 = –1 + 2 .2

3 = 3

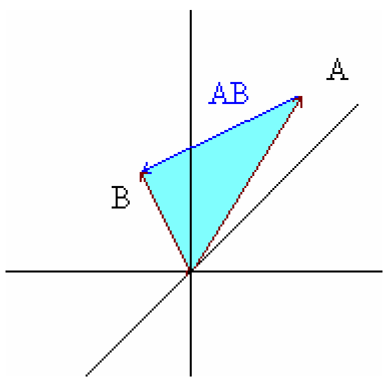
Las rectas se cortan en (2, 1, –1) + 2 (2, 3, 2) = (4, 5, –1) + 2 (1, 1, 2)

Resolvemos y obtenemos que (6, 7, 3) = (6, 7, 3)

Por lo tantotas rectas son coplanares.

7. Hallar el área del triángulo determinado por los vectores A = (1, 2, 5) y B = (–2, 4, 1).

Hay que recordar que el **área de un triángulo** es igual al la mitad del módulo del producto vectorial, entre A y B.



Área $= \frac{1}{2}\left\|\vec{A} \times \vec{B}\right\|$ Reemplacemos y resolvamos.

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\| i\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left\|-18i - 11j + 7k\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2 + (-11)^2 + 7^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{494} = \frac{1}{2}.22\sqrt{10} = \boxed{11\sqrt{2}}$$