

Primer Parcial de Matemática 2002 Cátedra de Gutiérrez

Ciudad Universitaria: Primer trimestre 2002

Ejercicio 1: La recta de ecuación $y = x + 3$ corta al eje x en el punto A, y corta al eje y en el punto B. Calcular la distancia entre A y B.

Ejercicio 2: Hallar la expresión de la función cuadrática que verifica $f(2) = 0$, $\text{Im}g. f = [-2, +\infty)$; el intervalo de decrecimiento de f es $(-\infty, -1)$.

Ejercicio 3: Dado $f(x) = \frac{4}{x-3} - 2$, calcular f^{-1} y el dominio de f^{-1} .

Ejercicio 4: Para $f(x) = -2 + e^{3/x}$, calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Hallar todas las asíntotas de f .

Solución de los Ejercicios:

Ejercicio 1: Cuando un punto de una función corta al eje x quiere decir que la coordenada “y” del punto es cero ($y = 0$). Para hallar la coordenada x , igualemos la ecuación a cero y despejemos “x”.

$$y = x + 3 \rightarrow 0 = x + 3 \rightarrow -3 = x$$

$$A = (-3, 0)$$

El punto donde la recta corta al eje y , tiene coordenada x igual a cero ($x = 0$). Para hallar el valor de la coordenada y reemplazamos a x por cero y realizamos la cuenta.

$$y = x + 3 \rightarrow y = 0 + 3 \rightarrow y = 3$$

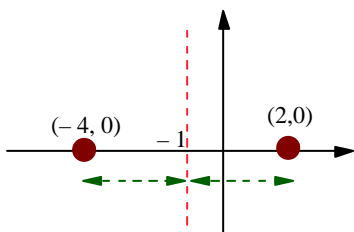
$$B = (0, 3)$$

Para hallar la distancia entre los dos puntos aplicamos Pitágoras: $D^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$

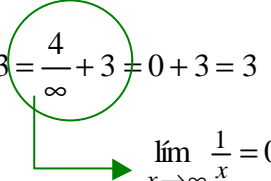
Se reemplaza las coordenadas por sus respectivos valores y se calcula la raíz cuadrada del resultado.

$$D = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-3)^2} \rightarrow D = \sqrt{18} \rightarrow \boxed{D = 4,24}$$

Ejercicio 2: Como la función cuadrática es un polinomio de grado dos, lo que te están pidiendo es que “armes” un polinomio de segundo grado. Hay que utilizar la información que te dan: *uno de los ceros* es $(2, 0)$, el otro lo tenés que “sacar” a partir del eje que se ubica donde termina el “intervalo de decrecimiento”: $x = -1$. El eje siempre deja a los ceros de la función a la misma distancia (uno de cada lado), así que el otro cero lo encontramos en el punto de abscisa -4 . Así que $x_1 = 2$ y $x_2 = -4$. La imagen de la función empieza en -2 , lo que implica que es la imagen del vértice de la parábola, cuyas coordenadas quedarán como $(-1, -2)$. Con estos datos podemos armar el polinomio.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+2} + 3 = \frac{4}{\infty+2} + 3 = \frac{4}{\infty} + 3 = 0 + 3 = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$A. H. = \{3\}$$

Ecuación de la asíntota horizontal: $y = 3$.

Ejercicio 4: calculemos los límites.

El signo + que aparece a la derecha del cero indica que el límite se calcula sólo desde los valores mayores a cero (los número positivos).

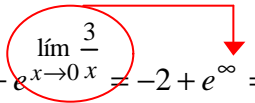
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -2 + e^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3}{x}} = -2 + e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x}} = -2 + e^{\infty} = -2 + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + e^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3}{x}} = -2 + e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}} = -2 + e^0 = -2 + 1 = -1$$

Nos piden calcular las asíntotas.

Asíntota vertical: valor correspondiente al dominio que tiene como límite el infinito ya que no posee imagen en la función. En este caso el límite de x tendiendo a cero por izquierda (valores negativos) no da como límite infinito, sino -2 . Pero la función tiene asíntota vertical contando el límite de x tendiendo a cero por derecha que sí da infinito.

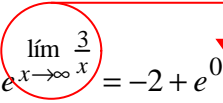
$$\lim_{x \rightarrow 0} -2 + e^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 + \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x}} = -2 + e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x}} = -2 + e^{\infty} = -2 + \infty = \infty$$



$$A. V. = \{0\} \text{ ó } x = 0 \text{ (que es la ecuación de la asíntota vertical)}$$

Asíntota Horizontal: valor del límite de la función cuando el elemento del dominio (x) tiende a infinito (es cada vez más grande). En este caso, existe la asíntota horizontal, el valor de ella es -1 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2 + e^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -2 + \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3}{x}} = -2 + e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}} = -2 + e^0 = -2 + 1 = -1$$



$$A. H. = \{-1\} \text{ ó } y = -1 \text{ (que es la ecuación de la asíntota horizontal)}$$