Segundo Parcial de Análisis (Cs. Económicas)

Cátedra Gutiérrez

Segundo parcial_1997:

1. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+5}\right)^{n+3}$

2. Estudiar la continuidad de la función f en $x = 0$ siendo $f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x-e^x} & \text{si } x>0 \\ -4x+2 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

3. La función de ganancia marginal por producir por unidad está dada por $G'_{(x)} = \dfrac{2x+5}{x^2+5x+20}$.

Determinar en asciende la ganancia si la producción varía de 20 a 30 unidades.

4. Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de $f_{(x)}$ = sen $(3x)$ en x = 0. Calcular un valor aproximado de sen (0,3) por medio del polinomio.

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+5}\right)^{n+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{n-2+5-5}{n+5}\right)^{n+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+5-7}{n+5}\right)^{n+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\cancel{\frac{n+5}{n+5}}-\frac{7}{x+5}\right)^{n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{n+5}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{7}}\right)^{n+3} = \left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{7}}\right)^{-\frac{n+5}{7}}}_{e}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{7}{n+5}\right).(n+3)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-7(n+3)}{n+5}} = e^{-7}$$

Usando L´Hopital

2) Para que una función sea continua en un punto debe cumplir ciertos "requisitos", el primero es el valor que se le de a x para la función tenga imagen (resultado). Para ello tomamos la parte de la ecuación que indica que $x \le 0 \to -4x + 2 = -4.0 + 2 = 2$.

El segundo requisito es que el límite de x tendiendo a cero ($x \to 0$), sea por izquierda o por derecha, nos de el mismo resultado, y la tercera condición es que este resultado sea la imagen de cero en la función.

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2}{1+x-e^x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-4x+2) = 2$

Trabajemos sobre la primera expresión, que al darnos una indeterminación, nos conviene trabajarla mediante L´Hopital.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4}{-e^x} = \frac{4}{-e^0} = -4$$

Los límites no son iguales, la función no es continua en $x = 0$.

3) Matemáticamente lo que nos están pidiendo es una integral definida entre el intervalo [20, 30].

$$\int_{20}^{30} \frac{2x+5}{x^2+5x+50}dx = \int \frac{2x+5}{u}.\frac{du}{2x+5} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| = \ln|x^2+5x+50|\Big|_{20}^{30}$$

$$u = x^2+5x+50$$
$$du = (2x+5)dx$$
$$\frac{du}{2x+5} = dx$$

$$\ln|30^2+5.30+50| - \ln|20^2+5.20+50| =$$
$$= \ln 1100 - \ln 550 \boxed{= 0{,}69}$$

4) El polinomio de Taylor es:

$$P_{(x)} = f_{(a)} + \frac{f'_{(a)}}{1!}(x-a) + \frac{f''_{(a)}}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n}{}_{(a)}}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Derivemos para armarlo:
$a = 0$
$f_{(0)}$ = sen (3.0) = 0; $f'_{(x)}$ = 3.cos $3x \to f'_{(0)}$ = 3.cos (3.0) = 3; $f''_{(x)}$ = – 9 sen $3x \to f''_{(0)}$ = – 9. sen 0 = 0
$f'''_{(x)}$ = – 27 cos $3x \to f'''_{(0)}$ = – 27.cos 0 = – 27.

0,3 = $3x \to x$ = 0,1

$$P_{(x)} = 0 + \frac{3}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-27}{3!}(x-0)^3$$

$$P_{(x)} = 3x - \frac{9}{2}x^3 \to P_{(0,1)} = 3.0{,}1 - \frac{9}{2}.0{,}1^3 \boxed{= 0{,}2955}$$

Hay que tener en cuenta que el resultado del sen 0,3 es en radianes.