Segundo Parcial – Ciencias Exáctas – 1997

1) Hallar el área de la región encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x-3}$, $y = ½x - 1$ y el eje x. Hacer un gráfico donde se indique la región.

2) Hallar $\int_0^3 f_{(x)}\,dx$ sabiendo que $f_{(x)} = 5x^2 . f''_{(x)}$; $f'_{(3)} = 2$; $f_{(3)} = -1$.

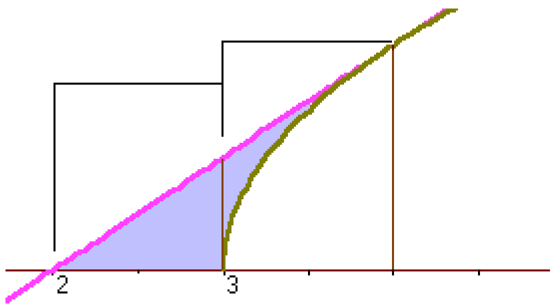
3) La función $f_{(x)} = \sqrt[5]{ax+1}$ tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ a $P_{(x)} = 1 + 7x - \frac{196}{2}x^2$. Hallar el valor de a si $R_{(x)}$ es el resto de orden 2, hallar la expresión de $R_{\frac{1}{2}}$.

4) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n+1}$ es convergente ó divergente.

Respuestas:

Ejercicio 1: Para hallar el punto de intersección de ambas gráficas, las igualamos y despejamos x.

$$\sqrt{x-3} = \tfrac{1}{2}x - 1 \rightarrow x - 3 = \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^2$$
$$x - 3 = \tfrac{1}{4}x^2 - x + 1$$
$$0 = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$
$$0 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 - 8x + 16\right)$$
$$0 = \tfrac{1}{4}(x-4)^2 \Rightarrow x = 4$$



En área entre las gráficas y el eje de las x depende de los ceros de la función de cada una de las funciones ($x = 2$ para la recta y $x = 3$ para la raíz) y el punto de intersección. De allí sacamos los límites de integración. Entre [2, 3] está la recta y entre [3, 4] debemos restar el área de la recta y la raíz. Las cuentas nos quedan así:

$$\int_2^3 \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)dx + \int_3^4 \left[\tfrac{1}{2}x - 1 - \sqrt{x-3}\right]dx =$$
$$= \left.\frac{x^2}{4} - x\right|_2^3 + \left.\frac{x^2}{4} - x - \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}\right|_3^4 =$$
$$= \left[\left(\frac{3^2}{4} - 3\right) - \left(\frac{2^2}{4} - 2\right)\right] + \left[\left(\frac{4^2}{4} - 4 - \frac{2}{3}\sqrt{(4-3)^3}\right) - \left(\frac{3^2}{4} - 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(3-3)^3}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{Área buscada}$$

Ejercicio 2: En este tipo de ejercicio necesitamos aplicar integral “por partes” ya que $f_{(x)} = 5\,x^2\, f''_{(x)}$ y no sabemos que la derivada de $5x^2$ sea $f''_{(x)}$ por lo que no se puede aplicar “sustitución”. No conviene dejar los límites de integración durante la operación ya que habría que cambiarlos.

$$\int u.\ dv = u.v - \int v.dv$$

$$\int 5x^2 . f''_{(x)}\ dx = 5x^2 f'_{(x)} - \int f'_{(x)}.10x.dx =$$

$u = 5x^2 \to du = 10x\ dx$

$dv = f''_{(x)}\ dx \to v = f'_{(x)}$

Aplicamos nuevamente por partes.

$$\int u.\ dv = u.v - \int v.dv$$

$$5x^2 f'_{(x)} - \int 10x. f'_{(x)}.dx = 5x^2 . f'_{(x)} - \left(10x. f_{(x)} - \int 10 f_{(x)} dx\right)$$

$u = 10x \to du = 10\ dx$

$dv = f'_{(x)}\ dx \to v = f_{(x)}$

$\int f_{(x)}dx = 5x^2 . f'_{(x)} - 10x. f_{(x)} + 10\int f_{(x)} dx$ (despejemos la integral de $f_{(x)}$)

$$\int f_{(x)}dx + 10\int f_{(x)}dx = 5x^2 . f'_{(x)} - 10x. f_{(x)} \to -9\int f_{(x)}dx = 5x^2 . f'_{(x)} - 10x. f_{(x)}$$

$\int f_{(x)}dx = -\frac{1}{9}\left(5x^2 . f'_{(x)} - 10x. f_{(x)}\right)$ (Ahora pongamos los límites de integración y podemos hallar lo que nos han pedido, teniendo en cuenta que $f'_{(3)} = 2$; $f_{(3)} = -1$).

$$\int_0^3 f_{(x)}dx = -\frac{1}{9}\left(5x^2 . f'_{(x)} - 10x. f_{(x)}\right)\Big|_0^3 = -\frac{1}{9}\left(5.3^2 . f'_{(3)} - 10.3. f_{(3)}\right) - \left[-\frac{1}{9}\left(5.0^2 . f'_{(0)} - 10.0. f_{(0)}\right)\right] =$$

$$-\frac{1}{9}(5.9.2 - 10.3.(-1)) - 0 = -\frac{40}{3}$$

Ejercicio 3: Nos dicen que la función $f_{(x)} = \sqrt[5]{ax+1}$ tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en $x_o = 0$ a $P_{(x)} = 1 + 7x - \frac{196}{2}x^2$.

Quiere decir que la primera derivada $f'_{(0)} = 7$ y la segunda derivada $f''_{(0)} = -196$

Derivemos la función para hallar la primera derivada:

$$f_{(x)} = \sqrt[5]{ax+1}$$

$$f'_{(x)} = \frac{1}{5\sqrt[5]{(ax+1)^4}}.a \to f_{(0)} = 7 \Rightarrow \frac{1}{5.\sqrt[5]{(a.0+1)^4}}.a = 7 \Rightarrow \frac{1}{5}a = 7 \Rightarrow a = 35.$$

Comprobemos con la segunda derivada.

$$f'_{(x)} = \frac{35}{5\sqrt[5]{(35x+1)^4}} \rightarrow f'_{(x)} = \frac{7}{\sqrt[5]{(35x+1)^4}}$$

$$f''_{(x)} = \frac{-196}{\sqrt[5]{(35x+1)^9}} \rightarrow f''_{(0)} = \frac{-196}{\sqrt{(35.0+1)}} = -196$$

Debemos hallar la expresión de $R_{\frac{1}{2}}$.

$$R_{n(x)} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}{}_{(a+\sigma(x-a))}$$ Donde $0 < \sigma < 1$ y a representa el valor que le damos a x para armar el polinomio. Es por eso que nos queda:

$$R_{n(x)} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}{}_{(\sigma x)}$$

Tomemos un valor intermedio de σ

$$R_{3\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} \cdot \frac{12348}{\sqrt[5]{(35\sigma\frac{1}{2}+1)^{14}}} \Rightarrow R_{3\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} \cdot \frac{12348}{\sqrt[5]{(\frac{35}{4}+1)^{14}}} \approx 21$$

(En este caso donde x = ½debemos calcular $\sqrt[5]{35.\frac{1}{2}+1} = \sqrt[5]{18{,}5} \approx 1{,}79$; aplicando el polinomio nos da un valor de – 20. El error es de 21,79).

Ejercicio 4: Para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n+1}$ es convergente aplicamos el criterio D'alambert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{(n+1)}}{f_{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)-1}}{2(n+1)+1} : \frac{2^{n-1}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1-1}}{2n+2+1} \cdot \frac{2n+1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{\cancel{2^n}.2^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(2+\frac{3}{n})}.2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\overbrace{\tfrac{1}{n}}^{0})}{(2+\underbrace{\tfrac{3}{n}}_{0})}.2 = \cancel{\frac{2}{2}}.2 = 2.$$

Como el límite es mayor que 1, entonces la serie es divergente.