

**Primer Parcial: Ciudad – 1<sup>er</sup> Cuat. de 2002**

- 1) Escribir el conjunto  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x + \frac{1}{x} > \frac{5}{2} \right\}$  como un intervalo o una unión de intervalos. Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de A.
- 2) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{x+4}-2}$ .
- 3) Calcular la demanda marginal en  $x = 48$  si se sabe que la función de ingreso total es  $R_{(x)} = x(800 - 6x)^{1/3}$ .
- 4) Hallar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento y los extremos relativos de la función  $f_{(x)} = x e^{2x^2+5x+3}$

**Solución:**

Ejercicio 1: Hay varias maneras de resolver este tipo de ejercicios; aquí explicaremos la forma que suponemos te resulta más fácil. (En realidad lo que cambia es la forma de presentarlo, los elementos matemáticos utilizados son los mismos).

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{x} > \frac{5}{2} &\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} > \frac{5}{2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{5}{2} > 0 &\Rightarrow \frac{2x^2 + 2 - 5x}{2x} > 0 \\
 2x^2 - 5x + 2 > 0 & \quad y \quad x > 0 \\
 2x^2 - 5x + 2 > 0 &\Rightarrow (x - 2)(x - \frac{1}{2}) > 0 \\
 * x - 2 > 0 \quad y \quad x - \frac{1}{2} > 0 & \\
 x > 2 \quad y \quad x > \frac{1}{2} &\Rightarrow x > 2 \\
 \text{ó} & \\
 ** x - 2 < 0 \quad y \quad x - \frac{1}{2} < 0 & \\
 x < 2 \quad y \quad x < \frac{1}{2} &\Rightarrow x < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Solución:  $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

Necesitamos despejar “x”, por lo que nos conviene operar (del lado donde se encuentran las x) para que quede lo más simple posible. Pasemos todo sobre un miembro quedando una fracción. El hecho de ser mayor que cero nos indica que cada el dividendo y el divisor (el de arriba y el de abajo) son positivos, mayores que cero. Factoricemos el numerador (aplicando la ecuación cuadrática), que debe ser mayor que cero; esto nos indica que el producto, ambos paréntesis, son positivos (mayores que cero)\* ó negativos (menores que cero)\*\*.

Despejamos cada uno de ellos. De cada uno de los resultados parciales (en rojo) expresamos en forma de unión de intervalos el resultado del ejercicio.

Como tenemos que x debe ser positiva ( $x > 0$ ) automáticamente tomamos solamente los valores positivos. Es así que la respuesta de este ejercicio es  $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

Evidentemente existe un ínfimo, “0”, pero no tenemos una cota superior.

Ejercicio 2: Se multiplica (y se divide) por lo mismo para sacar la raíz aplicando diferencia de cuadrado.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{x+4}-2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{x+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\text{sen}(3x)](\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\text{sen}(3x)](\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\text{sen}(3x)](\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4}+2) = \\
 &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4}+2) = 3 \cdot 1 \cdot (2+2) = 12
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Debemos calcular la demanda marginal en base de la función de ingreso total.

La función ingreso se calcula por el producto entre la ecuación demanda y la cantidad de productos:

$$R_{(q)} = P_{(x)} \cdot x$$

$R_{(x)} = x (800 - 6x)^{1/3}$ . es así que  $P_{(x)} = (800 - 6x)^{1/3}$ . Como nos piden demanda marginal, tenemos que derivarla.

$$P_{(x)} = (800 - 6x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow P'_{(x)} = \frac{1}{3} (800 - 6x)^{-\frac{2}{3}} (-6) \Rightarrow P'_{(x)} = \frac{-2}{\sqrt[3]{(800 - 6x)^2}}$$

$$\text{Como } x = 48, \text{ entonces, } P'_{(48)} = \frac{-2}{\sqrt[3]{(800 - 6 \cdot 48)^2}} = -2,03125.$$

Ejercicio 4: Para hallar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento y los extremos relativos de la función necesitamos derivar la función e igualarla a cero para aplicar Bolzano y determinar sus extremos. Al ser una multiplicación responde a la siguiente fórmula:  $f'_{(u \cdot v)} = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$f_{(x)} = x e^{2x^2 + 5x + 3}$$

$$f'_{(x)} = 1 \cdot e^{2x^2 + 5x + 3} + x \cdot e^{2x^2 + 5x + 3} \cdot (4x + 5) = 1 \cdot e^{2x^2 + 5x + 3} + e^{2x^2 + 5x + 3} \cdot (4x^2 + 5x)$$

factoriamos “ $e^{2x^2 + 5x + 3}$ ,” y nos queda:

$$f'_{(x)} = e^{2x^2 + 5x + 3} (4x^2 + 5x + 1)$$

La parte correspondiente a la función exponencial no nos puede darnos cero ni un valor negativo, es por eso que solamente vamos a trabajar con la expresión cuadrática para hallar los ceros de la derivada. (Aplicando cuadrática se obtienen ambos ceros).

$$4x^2 + 5x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} \text{ y } x_2 = -1.$$

Armemos el cuadro:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{4}, +\infty)$
$f'_{(x)}$	+	-	+
$f_{(x)}$			

$$\text{Máximo: } (-1, f_{(-1)}) = (-1, -9,31)^*$$

$$\text{Mínimo: } (-\frac{1}{4}, f_{(-\frac{1}{4})}) = (-\frac{1}{4}, -2,32)^*$$

\* Los resultados están redondeados.

$$\text{Intervalos de crecimiento: } (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{4}, +\infty)$$

$$\text{Intervalos de decrecimiento: } (-1, -\frac{1}{4}).$$