Análisis I (Ciencias Económicas)

Primer Parcial – Paternal (turno vespertino): 2do Cuat. 2003 Tema 4.

1. Escribir el conjunto A = $\left\{ x \in R \,/\, \dfrac{x^2}{x+5} > -1 \right\}$ como intervalo o unión de intervalos. Hallar, si existen, su ínfimo y su supremo.

2. Hallar $a \in$ R de modo que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+21} - 5}{a(x-4)} = 2$

3. Calcular la función de ganancia marginal y su valor en x = 3, cuando la función ganancia es $g_{(x)} = (x^2 + 3)e^{x^2 - 3x}$.

4. Hallar todos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de $f_{(x)} = \ln(x^4 + 4)$

Solución:

1. Resolvamos la inecuación para despejar "x".

$$\frac{x^2}{x+5} > -1 \Rightarrow \frac{x^2}{x+5} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 5}{x+5} > 0$$

$$x + 5 > 0 \rightarrow x > -5.$$

Sol: (– 5, + ∞)

Como el polinomio de grado dos (numerador) no es factoriable, nos dará como resultado siempre un número positivo. Es por eso que el denominador es el único que puede cambiarnos el signo. Para que sea mayor a cero, positivo, es condición que este sea, a su vez, también positivo.

El intervalo no posee supremo, pero el ínfimo es – 5.

2. Desarrollemos el límite:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+21} - 5}{a(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+21} - 5}{a(x-4)} . \frac{\sqrt{x+21} + 5}{\sqrt{x+21} + 5} = \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x+21}\right)^2 - 5^2}{a(x-4)\left(\sqrt{x+21} + 5\right)} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x + 21 - 25}{a(x-4)\left(\sqrt{x+21} + 5\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x-4}}{a\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x+21} + 5\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{a\left(\sqrt{x+21} + 5\right)} =$$

$$= \frac{1}{a(\sqrt{4+21} + 5)} = \frac{1}{10a} \Rightarrow \frac{1}{10a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{20}$$

3. Para hallar la ganancia marginal primero debemos derivar.

$$g_{(x)} = (x^2 + 3)e^{x^2 - 3x} \rightarrow g'_{(x)} = 2xe^{x^2 - 3x} + (x^2 + 3)e^{x^2 - 3x}.(2x - 3)$$

$$g'_{(x)} = e^{x^2-3x}.\left[2x + (x^2+3).(2x-3)\right]$$

$g'_{(3)}$ = e ^{0} .[2.3 + (9 + 3) (2.3 – 3)] = 1. (6 + 12 . 3) = 42.

4. Para hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad debemos, primeramente, derivar hasta la segunda derivada, igualar a cero, para despejar “*x*” y aplicar Bolzano.

No hay problema con el dominio ya que x^2 + 4 nunca da cero o valor negativo, así que nuestro dominio son los reales.

$$f_{(x)} = \ln(x^2+4) \Rightarrow f'_{(x)} = \frac{1}{x^2+4}.2x \Rightarrow f'_{(x)} = \frac{2x}{x^2+4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{2(x^2+4) - 2x.2x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{2x^2+8x-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$\frac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+8=0 \Rightarrow |\,x\,| = 2 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Calculamos los signos de la concavidad analizamos la segunda derivada:

$(\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
–		+		–

Puntos de inflexión: (– 2, ln 8) ; (2, ln 8)

Concavidad positiva: (– 2, 2)

Concavidad negativa: $(\infty, -2) \cup (2, +\infty)$