Análisis I (Ciencias Económicas)

Primer Parcial – Paternal (turno tarde): 1er Cuat. 2003 Tema 2.

1. Escribir el conjunto A = $\{x \in R / \frac{4}{x-4} > \frac{3}{x-4}\}$ como un intervalo o unión de intervalo.

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+31}-6}{x-5}$

3. La función de ingreso total de cierto producto es $R_{(q)} = \sqrt{4q^2+93}$. Calcular la demanda marginal para $q = 1$.

4. Dada la función $f_{(x)} = \ln(-3x^2 + 15x - 12)$, hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos.

Respue stas:

1. Resolvamos la inecuación: $\frac{4}{x-4} > \frac{3}{x-4} \Rightarrow \frac{4}{x-4} - \frac{3}{x-4} > 0 \Rightarrow \frac{4-3}{x-4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-4} > 0$

Como 1 es un valor positivo, $x - 4$ debe ser positivo también. Así que: $x - 4 > 0 \to x > 4$

La solución es $(4; +\infty)$

2. Resolvamos el límite:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+31}-6}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+31}-6}{x-5}.\frac{\sqrt{x+31}+6}{\sqrt{x+31}+6} = \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x+31}\right)^2-6^2}{(x-5)\left(\sqrt{x+31}+6\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{x+31-36}{(x-5)\left(\sqrt{x+31}+6\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x+31}+6\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x+31}+6} = \frac{1}{12}$$

3. El ingreso total es: $R_{(q)} = P_{(q)} . q = \sqrt{4q^2+93} \Rightarrow P_{(q)} = \frac{\sqrt{4q^2+93}}{q}$ (despejando la ecuación demanda)

Derivamos: $$P'_{(q)} = \frac{\frac{1}{2.\sqrt{4q^2+93}}.(8q).q - \sqrt{4q^2+93}}{q^2} = \frac{4q^2 - \left(4q^2+93\right)}{q^2.\sqrt{4q^2+93}} = \frac{-93}{q^2.\sqrt{4q^2+93}}$$

$$P'_{(1)} = \frac{-93}{1^2\sqrt{4.1^2+93}} = \frac{-93}{\sqrt{97}}.$$

4. La función $f_{(x)} = \ln(-3x^2 + 15x - 12)$

Hallemos el dominio teniendo en cuenta que en la función logarítmica lo que se encuentra dentro del paréntesis, afectado por el logaritmo, debe ser siempre positivo:

$-3x^2 + 15x - 12 > 0$ factoricemos, aplicar cuadrática.

$(1 - x)(x - 4) > 0$ se resuelve la inecuación de manera que cada uno de los binomios debe ser positivo. Hay dos opciones: que ambos sean positivos o ambos negativos, las operaciones corren por cuenta de cada uno de ustedes.

Dom. : (1, 4)

Necesitamos derivar para hallar lo que nos piden:

$$f'_{(x)} = \frac{1}{-3x^2 + 15x - 12} .(-6x + 15) = \frac{15 - 6x}{(1 - x)(x - 4)}$$

Igualemos a cero, la derivada y despejemos x (sólo el numerador ya que el denominador nos dará los extremos del dominio).

$$\frac{15 - 6x}{-3x^2 + 15x - 12} = 0 \rightarrow -6x + 15 = 0 \rightarrow x = 5/2.$$

Para realizar "Bolzano" tomemos en cuenta el cero y los extremos del dominio:

	1	(1, 5/2)	5/2	(5/2, 4)	4
$15 - 6x$		+	0	–	
$1 - x$		–		–	
$x - 4$		–		–	
		+	máx.	–	

El producto y la división entre los tres binomios nos indica el resultado que queda dentro de los dos intervalos. Si es positivo ese intervalo es creciente y, si es negativo, el intervalo es decreciente (es lo que quieren mostrar las flechas). Ojo, el 1 y el 4 no pertenecen al dominio, por lo tanto no hay un punto que indique si son máximos o mínimos (de haber pertenecido, se tendría que haber "revisado" para saber que tipo de extremo eran . . .).

Mínimos: no hay

Máximos: (5/2; ln 27/4)

Intervalo de crecimiento: (1, 5/2)

Intervalo de decrecimiento: (5/2, 4)