Primer Parcial Álgebra: CBC (U.B.A.)

(1) Primer Parcial: 1999

1. Hallar, si es posible, las ecuaciones de los planos con normal N = (4, - 2, 4) que están a 5 del punto P = (0, 1, -1)
2. Determinar los valores de k para los cuales el siguiente sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ k\,x_1 + (k+2)x_2 + (k+1)x_3 = 0 \\ (k+1)x_1 + (k+2)x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Sea S = $\{x \in R^4 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ y sea B = {(-1, 1, 1, 1);(-3, 1, -1,-1); ;(1,-1,-3,-1);(-2, 1, 0, 1)}. Hallar, si es posible, un conjunto B´⊂ B tal que B´ sea base de S. Justificar.
4. Sea B = $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de R^3. Si $S = < v_1 + 2v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3 >$
a) Hallar una base del subespacio $\Pi \subset R^3$ tal que $S \oplus \Pi = R^3$. b) Si v_1 = (1,-1, 1); v_2 = (-1, 1, 0) y v_3 = (1, 0, 0), dar las coordenadas de los elementos de la base hallada en a) en la base B y en la base canónica.

Rta: 1) $2x - y + 2z = 12$; 2) $k \in R - \{-1, 0\}$; 3) B'= <(– 1, 1, 1, 1);(– 1, – 1, – 3, – 1);(– 2, 1, 0, 1)> ; 4) a) $\Pi = < v_1 - 2v_2, v_2 + v_3, v_3 - v_1 - v_2 >$. b) ármenla.

(2) Primer Parcial: 1998

1) Sea S = $\{x \in R^4 / 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ y } x_4 = 0\}$. Hallar un subespacio $\Pi \subset R^4$ tal que (1, 0, – 1, 2) ∈ Π y $R^4 = S \oplus \Pi$.
2) Sea $S \subseteq R^3$; S = < (a, 1, a); (3ª , a, – a)>. Hallar la dimensión de S ∀a ∈ R. Justificar la respuesta.
3) Hallar todas las matrices $A \in R^{2 \times 2}$ que verifican: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.A = A.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
4) Sean L, la recta de dirección (1,2,– 2) que pasa por el punto P = (a, b, c) y sea Q el punto Q = (1,2,– 2) + (a, b, c). Si Π es el plano perpendicular a L que pasa por P, probar que d(Q,Π) = ||(1,2,– 2)||.

Rta: 1) $\Pi = \{x \in R^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_2 - 2x_3 = x_4\}$; 2) Dim: 2; 3) A es canónica; 4) Q es un punto de la recta L ⇒ d ||Q Π|| = d ||P Q|| = || Q – P || = || (1, 2, – 2) + (a, b, c) – (a, b, c) || =
= ||(1, 2, – 2) ||.

(3) Primer Parcial: 1997 Tema 3

1. Sea Π en el plano que pasa por los puntos A = (1,–1,0), B = (2,0, −1) y C = (3,–2,1) $C = (3,-2,1)$ y sea $\beta = \{(1,-1,1);(1,1,0);(-1,0,0)\}$. Encontrar un punto P del plano Π, cuyas coordenadas en la base β sean de la forma: $(P)_\beta = (\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda - 1)$, con λ ∈ R.
2. Si el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es igual a 6, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3c & d \\ 0 & 0 & 3a & b \end{pmatrix}$$

3. Sean S y T los subespacios de R^4 definidos por

$$S: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (a+2)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad T: \begin{cases} (a^2 - 9)x_2 + 2x_4 = 0 \\ (a+3)x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcular la dimensión de S ∩ T para todos los valores de a ∈ R.
4. En R^4, sean S = <(1, -1,1,0);(1,-2,0,1)> y sea H = $\{x / x \in R, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Hallar, si es posible, una base de H que contenga a una base de $S^\perp$.

Respuestas: 1) $P = (2,0,1)$; 2) 126 ; 3) Dim S ∩ T = 0 ; 4) <(1,1,0,1);(-1,0,1,1);(0,0,0,1)>