

Algebra (71) – Primer Parcial – 2<sup>do</sup> Trim. 2005 – Tema 1.

1. L es la recta de ecuación X:  $(1, -1, 2) + (0, 4, 3)$ ; P es el punto de L que está en el plano  $x_1x_2$  y Q =  $(-1, 5, 0)$ . Dar la ecuación de la recta que pasa por P, Q.

2. Determinar los valores de a y b para que el sistema S =

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+3z=2 \\ -x+2y+az=b \end{cases}$$

Sea i) Compatible determinado

ii) Compatible indeterminado

3) Un pintor compró 40 latas de pintura para exterior, 40 latas de pintura para interiores y 5 latas de pintura para metales, se pagó \$ 450. Si hubiera comprado el doble de latas para interiores, el doble de para metales y nada de las otras habría pagado \$420. Si hubiera comprado el doble de latas para exteriores, el doble de para metales y nada de las otras habría pagado \$580. ¿Cuánto pagó por 1 lata de cada clase de pintura?

4) Dar una base del subespacio  $S = \langle (1, 2, 1, -1); (1, 4, 4, 0), (-1, 2, 5, 3) \rangle$

Decidir si  $V = (1, 0, -2, -2)$  pertenece a S. En caso afirmativo, escribir V como combinación lineal de la base dada.

Solución:

1) Que esté incluido en el plano  $x_1x_2$  implica que las dos primeras coordenadas pueden tener cualquier valor pero la tercera  $x_3$  tiene valor cero.

$$(1, -1, 2) + (0, 4, 3) = (x_1; x_2; 0)$$

O sea que  $0 = 2 + 3$ . Por lo que puede calcularse alfa cuyo valor será  $-3/2$

Todos los puntos de la recta  $X = (1, -1, 2) + (0, 4, 3)$  pueden ser expresados como:

$$x_1 = \quad \text{por lo que } x_1 = -3/2$$

$$x_2 = - \quad + 4 \text{ por lo que } x_2 = 3/2 + 4 = 11/2$$

$$x_3 = 2 \quad + 3. \text{ por lo que } x_3 = 2(-3/2) + 3 = 0$$

$$P = (-3/2, 11/2, 0) \text{ y } Q = (-1, 5, 0).$$

Para calcular el vector director de la recta se restan P y Q :  $P - Q = (-3/2, 11/2, 0) - (-1, 5, 0) =$

$$= (-1/2, 1/2, 0)$$

La recta que pasa por P y Q puede expresarse como:

$$X: (-1/2, 1/2, 0) + (-3/2, 11/2, 0) \text{ ó como } X: (-1/2, 1/2, 0) + (-1, 5, 0)$$

Ambas expresiones son igualmente válidas.

2) El sistema puede expresarse como matriz y resolverse por varios métodos.

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+3z=2 \\ -x+2y+az=b \end{cases}$$

El más utilizado por esta cátedra es Gauss. Este método consiste en eliminar las filas de abajo mediante sumas o restas para obtener una matriz triangulada que permita hallar  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & a & b \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & a-1 & b+1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-13 & b-7 \end{array} \right)$$

El valor de  $a$  y  $b$  determinarán que tipo de sistema tendremos:

- i) Si  $a$  es distinto de 13 no nos interesa el valor de  $b$ , el sistema será siempre compatible determinado, o sea que siempre existirá una solución para el sistema,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tendrán un único valor.
- ii) Si  $a = 13$  y  $b = 7$  la fila de abajo se irá, será todo cero, por lo tanto tendremos infinitas soluciones. El sistema será compatible indeterminado.
- iii) Si bien esta opción no se ha pedido... aprovechemos para explicar que si  $a$  es igual 13 y  $b$  distinto de 7 no obtendremos ningún resultado. El sistema será incompatible.

3) El problema debe escribirse como un sistema de ecuaciones para poder resolverse.

En este caso  $x$  representará la pintura de interiores,  $y$  la de exteriores y  $z$  la de metales.

$$40x + 40y + 5z = \$ 450$$

$$80x + 0y + 10z = \$ 420$$

$$0x + 80y + 10z = \$ 580$$

El resultado de este sistema de ecuaciones es:  $x = 4$ ,  $y = 6$ ,  $z = 10$ .

4) Para ser una base los vectores de  $S$  deben ser generadores y linealmente independientes.

Cuando se pide que sea combinación lineal se está pidiendo hallar:

$$(1, 2, 1, -1) + \alpha(1, 4, 4, 0) + \beta(-1, 2, 5, 3) = (1, 0, -2, -2)$$

El valor de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  debe ser uno solo. En este caso  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -1$  y  $\gamma = 0$

Escrito como combinación lineal sería:

$$2(1, 2, 1, -1) - 1(1, 4, 4, 0) + 0(-1, 2, 5, 3) = (1, 0, -2, -2)$$