Primer Parcial de Análisis Ciencias Económicas

Cátedra de Gutiérrez

Álgebra Cs. Ec. (71) – Primer Parcial – Drago: 07/05/2002 Tema 4

1. Dadas las rectas $L_1 : y = 6x + 4$ y $L_2 : x = \alpha\,(1, 3) + (-2, 7)$, hallar la ecuación paramétrica de la recta L que no corta a L_1 y pasa por el punto (–1, 5). Determinar la intersección de L y L_2.

2. Determinar todas las soluciones $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$

3. Una maestra de arte decide preparar con sus alumnos un mural en tonos ocre. Para ello fabrica tres colores: I, II y III. En la composición de los mismas se utilizan pintura amarilla, bermellón y marrón en las siguientes proporciones:

Color I: 20 % de bermellón, 40 % de amarillo y 40 % de marrón
Color II: 80 % de bermellón, 10 % de amarillo y 10 % de marrón
Color III: 20 % de amarillo y 80 % de marrón.

La maestra dispone de 18 litros de pintura bermellón, 7 litros de pintura amarilla y 10 litros de pintura marrón. Si quiere agotar el stock, ¿qué cantidad de cada color se debe preparar?.

4. Determinar los valores de $k \in$ R para los cuales el subespacio S = <(2, – 1, 5), (1, 1, k); (0, k, 1)> tiene dimensión 2.

Respuestas:

1. Como L que no corta a L_1, en dos dimensiones, debe ser paralela. Tiene la misma pendiente (1, 6) Como pasa por (–1, 5) podemos escribir a L: $\beta\,(1, 6) + (-1, 5)$.

Ahora hallemos la intersección entre L y L_2. Para ello igualamos las ecuaciones y hallamos de esta manera los coeficientes (α y β).

$$\alpha\,(1, 3) + (-2, 7) = \beta\,(1, 6) + (-1, 5) \rightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = \beta - 1 \rightarrow \alpha = 1 + \beta = 1 + 5/3 = 8/3. \\ 3\alpha + 7 = 6\beta + 5 \rightarrow 3(1 + \beta) + 7 = 6\beta + 5 \rightarrow \boxed{\beta = 5/3} \end{cases}$$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado (es una manera de verificar que se han hecho bien las cuentas).

L_2: 8/3 (1, 3) + (– 2, 7) = (2/3, 15) L : 5/3 (1, 6) + (– 1, 5) = (2/3, 15)

2) Para resolver $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$ expresemos como matriz ampliada. Aquí lo resolveré mediante pivote.

Se toma el primer elemento de la primer columna como Pivote. Excepto ese valor toda la columna tendrá valor cero, mientras que la fila se la deja igual.

Pivote

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

El valor de cada elemento de la matriz se calcula con la diferencia (resta) entre el producto del número por el pivote y el producto entre los elementos que pertenecen a su misma fila y columna

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2.1-(-1)(-1) & 3.1-(-1).1 & 1.1-(-1)(-1) & -1.1-(-1)5 \\ 0 & -3.1-2.(-1) & -2.1-2.1 & -2.1-2.(-1) & 6.1-2.5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Ambas filas son iguales por lo tanto dejamos una sola.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

A partir de esta matriz calculamos los resultados del sistema indeterminado.

$x_2 + 4x_3 = 4 \to x_2 = 4 - 4x_3$.

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \to x_1 - (4 - 4x_3) + x_3 - x_4 = 5 \to x_1 - 4 + 5x_3 - x_4 = 5 \to x_1 = 9 - 5x_3 + x_4$.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9 - 5x_3 + x_4, 4 - 4x_3, x_3, x_4) = (9, 4, 0, 0) + x_3\,(-5, -4, 1, 0) + x_4\,(1, 0, 0, 1)$

Cualquier solución del sistema pertenece al subespacio cuya base es:

$\boxed{<(9, 4, 0, 0); (-5, -4, 1, 0); (1, 0, 0, 1)>.}$

3. Se arma la matriz a partir de los datos que da el problema. Llamemos x al color I, y al color II y z al color III. Como sabemos los litros de pintura a utilizar armamos un sistema, expresando los porcentajes de manera numérica: 20% es 20/100 o sea 0,2.

$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}8y + 0z = 18 \\ 0{,}4x + 0{,}1y + 0{,}2z = 7 \\ 0{,}4x + 0{,}1y + 0{,}8z = 10 \end{cases}$ Armamos la matriz correspondiente y la resolvemos (mediante el método que te hayan enseñado en clase)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 18 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 & 7 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}8 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow x = 10; y = 20; z = 5.$$

Obtendremos: 10 litros del color I, 20 litros del color II y 5 litros del color III.

4. Tenemos el subespacio S con tres vectores pero necesitamos que tenga dimensión 2, o sea, queremos que se vaya un vector; ya que deben quedar dos vectores para que tengamos dimensión dos. Así que expresamos al subespacio como una matriz, la triangulamos hasta que en una fila sólo quede una ecuación que nos permita calcular k, en los otros lugares debemos tener cero.

S = <(2, – 1, 5), (1, 1, k); (0, k, 1)>

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2k-5 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{kF_2 - 3F_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2k-5 \\ 0 & 0 & 2k^2 - 5k - 3 \end{pmatrix}$$

Para que quede dimensión 2, la últimas fila debe desaparecer, dar cero.

Haciendo que $2k^2 - 5k - 3 = 0$ podemos hallar los valores que nos están pidiendo para que el subespacio quede de dimensión dos. Para ello aplicamos la ecuación cuadrática (Bascara).

$$2k^2 - 5k - 3 = 0 \rightarrow \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$k_1 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$k_2 = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

De esta manera hemos determinado que si $k = 3$ o si $k = -\frac{1}{2}$ el subespacio quedará de dimensión dos.