

Primer Parcial de Álgebra

Cátedra Fauring (ex – Gutiérrez)

Algebra Cs. Ec. (71) – Primer parcial (Drago) – Primer Cuatrimestre 2009 – Tema 3

1. Dadas las rectas: $L_1 : X = \lambda (1, 2, 0) + (2, 3, 2)$ y $L_2: X = \lambda (3, 0, 1) + (8, 4, 1)$, hallar una ecuación de la recta paralela a L_1 y corta al plano XY en el mismo punto que L_2

Solución:

Para escribir vectorialmente una recta necesitamos dos elementos. El vector director (que es el vector cuya dirección es la de la recta) y un punto de paso (que indica por donde pasa esa recta, o sea, donde está ubicada en el plano)

Cuando dos rectas son paralelas tienen el mismo vector director, así que la tercera recta (la que llamaremos L_3) y L_1 poseen a $(1, 2, 0)$ como vector director.

Ahora necesitamos un punto de paso, el problema nos dice que ese punto será la intersección entre el plano XY y L_2 .

Probablemente te preguntarán que es el plano XY. Es el plano determinado por los ejes X e Y que pasa por el origen de coordenadas, lo que implica que $Z = 0$. Así que cualquier punto del plano XY debe escribirse como $(x, y, 0)$

Busquemos ese punto en la recta L_2 .

$$\lambda (3, 0, 1) + (8, 4, 1) = (x, y, 0)$$

No hay que olvidarse que debemos trabajar separadamente en cada una de las coordenadas.

$$\lambda \cdot 3 + 8 = x$$

$$\lambda \cdot 0 + 4 = y$$

$$\lambda \cdot 1 + 1 = 0$$

Lo que nos permitirá hallar los valores que nos están pidiendo (primero hay que calcular λ)

$$\lambda \cdot 3 + 8 = x \rightarrow (-1) \cdot 3 + 8 = x \rightarrow x = 5$$

$$\lambda \cdot 0 + 4 = y \rightarrow y = 4$$

$$\lambda \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Entonces el punto $(x, y, 0) = (5, 4, 0)$

Ahora podemos armar la ecuación vectorial de la recta L_3 .

$$L_3 : \lambda (1, 2, 0) + (5, 4, 0)$$

2. Un club obtiene la concesión de un predio municipal y debe optar entre dos regímenes para abonar el canon correspondiente:

i) Pagar el 13 % de los ingresos percibidos por cuota social

ii) Pagar \$ 2000 fijos más el 8 % de los ingresos percibidos por cuota social.

a) ¿Para qué monto de ingresos el canon es el mismo para ambos regímenes?

b) Si el club recauda \$50000 en concepto de cuotas sociales, ¿por qué régimen le conviene optar?

Solución:

a) Cada uno de los “regímenes” a optar puede ser representado por una ecuación lineal (recta): Así la primera opción del 13 % o sea $13/100$ (0,13) puede ser escrita como: $f(x) = 0,13x$ Donde x representa la totalidad del dinero recaudado por la utilización del predio. La segunda opción, el 8 % (o sea $8/100 = 0,08$) y un monto fijo de \$ 2000 puede escribirse como $g(x) = 0,08x + 2000$ Para saber qué monto de ingresos el canon es el mismo en ambos regímenes, sencillamente igualamos las ecuaciones:

$$0,13x = 0,08x + 2000$$

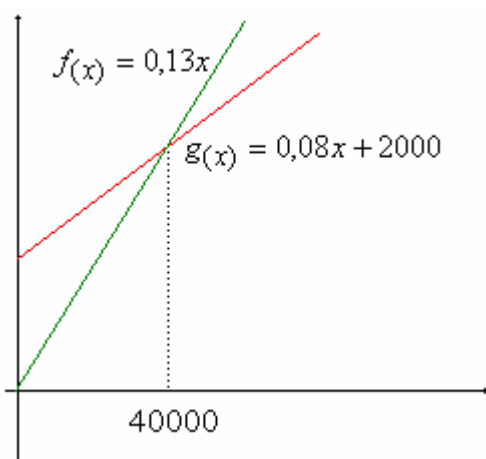
Se despeja x

$$0,13x - 0,08x = 2000$$

$$0,05x = 2000$$

$$x = 2000 / 0,05$$

$$x = 40000$$



b) Si graficamos ambas ecuaciones, la primera opción en color verde y la segunda opción en color rojo, podemos ver claramente que el punto de equilibrio entre las dos opciones es cuando el club recauda \$ 40000.

Para valores inferiores al equilibrio, la mejor opción (donde se paga menos) es la que se paga el 13 %.

Para valores superiores al equilibrio, la mejor opción es la que segunda. Así que si el club recauda \$50000 en concepto de cuotas sociales, el régimen que le conviene optar es el segundo (pagará menos, pueden sencillamente reemplazar x por \$ 50000 en cada una de las ecuaciones y observarán el resultado)

3. Hallar a y b para que el sistema
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$
 sea compatible indeterminado.

Para los valores hallados de a y b , dar todas las soluciones del sistema.

Solución:

Primeramente pasemos los coeficientes del sistema (los números que están multiplicando a las x) en una matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & a & b \end{array} \right)$$
 Aplicaremos el método de Gauss (pues es el que usa esta cátedra aunque hay métodos más fáciles, como el de gauss-Jordan) el que consiste en obtener un triángulo de ceros en la parte inferior de la matriz (matriz triangulada inferiormente) que permite calcular el valor de las x .

Toda matriz está dividida en filas y columnas. En este caso nos interesan las filas. Llamaremos

F_1 , F_2 y F_3 a la primera, segunda y tercera fila.

$$\begin{matrix} F_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ F_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ F_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & a & b \end{array} \right) \end{matrix} \right) \end{matrix}$$
 Lo que primeramente queremos es que la primera columna nos quede el 1 (que encabeza la columna) y todos los otros números sean ceros. Para ello sumaremos o restaremos la F_1 con las siguientes filas

$$\begin{array}{l}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 4 & 0 \\
 0 & 2 & a & b
 \end{array} \right)
 \xrightarrow{\text{operamos las filas}}
 \begin{array}{l}
 F_1 \\
 F_2 - F_1 \\
 F_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 1-1 & 0-(-2) & 4-1 & 0-2 \\
 0 & 2 & a & b
 \end{array} \right)
 =
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 3 & -2 \\
 0 & 2 & a & b
 \end{array} \right)$$

acá tenemos un cero, no es necesario operar

Ahora el que debemos hacer cero son todos los números de la segunda columna debajo de la F_2 (en este caso solamente es un número) Trabajamos con la matriz (equivalente) que hemos obtenido:

$$\begin{array}{l}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 3 & -2 \\
 0 & 2 & a & b
 \end{array} \right)
 \xrightarrow{\text{operamos las filas}}
 \begin{array}{l}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3 - F_2
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 3 & -2 \\
 0 & 2-2 & a-3 & b-(-2)
 \end{array} \right)
 =
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 3 & -2 \\
 0 & 0 & a-3 & b+2
 \end{array} \right)$$

↑
el 2 debe transformarse en cero

La Matriz ha quedado triangulada inferiormente.

Como el problema nos pide que el sistema sea compatible indeterminado cada elemento de la F_3 debe ser cero. Así que $a - 3$ y $b + 2$ deben ser nulas.

Despejando:

$$\begin{array}{l}
 a - 3 = 0 \text{ nos queda que } a = 3 \\
 b + 2 = 0 \text{ nos queda que } b = -2
 \end{array}$$

En este caso el sistema nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 3 & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \rightarrow
 \begin{cases}
 x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\
 2x_2 + 3x_3 = -2
 \end{cases}$$

Despejamos x_1 y x_2 por lo que ambas quedan en función de x_3 . (Las cuentas debés hacerlas vos) de manera que nos queda: $x_1 = -4x_3$. $x_2 = -1 - 3/2 x_3$.

Así que la recta solución queda:

$$(-4x_3, -1 - 3/2 x_3, x_3) = x_3 (-4, -3/2, 1) + (0, -1, 0)$$

$$\begin{array}{l}
 4. \text{ Dados los subespacios de } \mathbb{R}^4 \quad S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \text{ y} \\
 T = \langle (-1, 1, 0, 0); (0, 0, -1, -1); (-1, 1, 1, 1) \rangle
 \end{array}$$

Hallar si es posible una base de S que contenga una base de T.

Solución:

Recordemos que una base de un subespacio es un generador cuyos vectores son linealmente independientes (L I).

Lo que necesitamos primeramente es buscar una base de cada uno de los subespacios. Empecemos por T

Para que los vectores sean L I, se debe darse que en la expresión:

$$\alpha(-1,1,0,0) + \beta(0,0,-1,-1) + \chi(-1,1,1,1) = (0,0,0,0)$$

Los coeficientes (las letras griegas) sean cero para que su suma sea nula (o sea nos de el vector nulo)

Hay varias maneras de resolver esta operación, aquí lo haremos mediante matrices.

Escribamos la matriz asociada y triangulemos para hallar el valor de los coeficientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Operamos}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El hecho que nos queden dos filas nos indica que el sistema es linealmente dependiente (L D), ya que los coeficientes no dan cero.

$$\alpha + \chi = 0 \rightarrow \alpha = -\chi$$

$$-\beta + \chi = 0 \rightarrow \beta = \chi$$

Según el valor que le demos a gamma tendremos el valor de alfa y beta.

$$\text{Si } \chi = 1 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ y } \beta = 1$$

$$-1(-1,1,0,0) + 1(0,0,-1,-1) + 1(-1,1,1,1) = (0,0,0,0)$$

Así que al despejar: $(-1,1,1,1) = (-1,1,0,0) - (0,0,-1,-1)$ vemos que el tercer vector es combinación lineal de los otros dos. Como podemos despejar cualquier vector, la base de T nos quedará de dimensión dos (o sea, dos vectores). Los vectores que elijamos deben pertenecer a S, ya que eso es lo que pide el problema.

Para saber cual de los vectores pertenece a S, sencillamente ubiquemos a cada vector en la ecuación de S para ver si la cumple.

$$(-1,1,1,1) \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \rightarrow -1 + 1 + 1 - 1 = 0 \text{ Cumple}$$

$$(-1,1,0,0) \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \rightarrow -(-1) + 1 + 0 - 0 = 2 \text{ No cumple}$$

$$(0,0,-1,-1) \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \rightarrow 0 + 0 - 1 - (-1) = 0 \text{ Cumple}$$

Nuestra base en T será $\{(-1,1,1,1); (0,0,-1,-1)\}$

La base que buscamos en S tiene dimensión 3 (Hay que tener en cuenta que es un espacio de \mathbb{R}^4 con una sola ecuación: $4 - 1 = 3$) Nos hace falta un vector. Podemos inventarlo pero asegúrense que sea L I. Por ejemplo $(1,0,0,1)$

De esa manera tenemos que la base de S es:

$$\{(-1,1,1,1); (0,0,-1,-1); (1,0,0,1)\}$$

Si necesitas preparar tu parcial, final o libre puedes llamar al
011-15-67625436 (Lujan)

Y si buscás modelos de parciales, encontralos en forma gratuita en:

Soko.com.ar